421

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 126.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107-8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1903.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 126.

Seite

Fischer, V. Darstellung der Bewegungsgleichung für elastische Körper in Vectorform. . . . . — 233

Heffter, L. Zur Classification der quadratischen Formen, der Curven und Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse. . . . . — 83

Hensel, K. Bemerkungen zur Determinantentheorie. . . . . — 73

— — Zur Theorie der Systeme. . . . . — 165

Horn, J. Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage. . . — 194

Jung, H. Ueber Thetafunctionen, die nicht zur *Riemann*schen Klasse gehören. — 1

Kühne, H. Angenäherte Auflösung von Congruenzen nach Primmodulsystemen in Zusammenhang mit den Einheiten gewisser Körper. . . . — 102

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft für das Jahr 1906. — 163

Saalschütz, L. Neue Formeln für die *Bernoulli*schen Zahlen. . . . . — 99

Teixeira, F. G. Sur la convergence des formules d'interpolation de *Lagrange*, de *Gauss*, etc. . . . . — 116

Tichomandritzky, M. Uebergang von den *Abel*schen Integralen zu den Thetafunctionen. . . . . — 283

Thomé, L. W. Zur Theorie der algebraischen Functionen mit Bezugnahme auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen. . . . . — 52

— — Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. . — 71

Voronoï, G. Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques. . . — 241

Zimmermann, O. Ueber die Brennpunkte, die Leitlinien und die Orthogonale einer ebenen algebraischen Curve beliebiger Klasse. . . . . — 171

138998

Ueber Thetafunctionen, die nicht zur *Riemann*schen Klasse gehören.

(Von Herrn *Heinrich Jung* in Marburg.)

Die folgende Arbeit*) ist auf eine Anregung des Herrn Prof. *Schottky* entstanden. Sie schliesst an dessen Arbeit: „Ueber die charakteristischen Gleichungen symmetrischer ebener Flächen und die zugehörigen *Abel*schen Functionen“ im 106. Bande dieses Journals an**).

Die Aufgabe aber ist folgende:

Es sei durch eine Gleichung $G(p, q) = 0$ vom Range τ ein algebraischer Körper K vom Range τ definirt. Aus diesem bilden wir durch Adjunction der Quadratwurzel z aus einer rationalen Function $H(p, q)$ einen Körper $K(z)$; er sei vom Range ϱ. In diesem Körper giebt es dann ϱ linear unabhängige Integrale erster Gattung; unter ihnen können wir die τ Integrale erster Gattung des Körpers K annehmen. Die übrigen $\varrho - \tau = \sigma$ Integrale lassen sich dann so normiren, dass sie nur 2σ von einander unabhängige Periodicitätsmoduln haben, ohne dass sich aber diese Integrale auf Integrale eines Körpers von niedrigerem Range reduciren lassen. Sie geben also Veranlassung zur Bildung von ϑ-Functionen von σ Variabeln, die allgemeiner sind als die *Riemann*schen. Diese ϑ-Functionen lassen sich in einfacher Weise durch die zu $K(z)$ und K gehörenden *Riemann*schen ϑ-Functionen von ϱ und τ Variabeln ausdrücken.

*) Ein Theil der folgenden Arbeit diente mir als Habilitationsschrift und zwar im wesentlichen die §§ 1, 7, 8, 10—12, 14.

**) Man sehe auch die Göttinger Preisschrift *Wirtinger*s. (Leipzig 1895).

Während in der Arbeit von Herrn *Schottky* der Fall $\tau = 1$ genauer untersucht ist, wollen wir im Folgenden den Fall $\tau = 2$ behandeln, und zwar unter der Annahme, dass für die Argumente der ϑ-Functionen Integrale erster Gattung gesetzt werden. Da dann die ϑ der *Riemann*schen Art den Wurzelfunctionen proportional werden, diese sich aber bestimmen lassen, so können wir mit Hülfe der schon erwähnten Beziehungen zwischen den einzelnen ϑ bis auf einen gemeinsamen transcendenten Factor die Werthe der allgemeineren ϑ-Functionen von σ Variabeln für den Fall bestimmen, dass ihre Argumente Integrale erster Gattung sind. Und diese Bestimmung soll unsere Hauptaufgabe sein.

Die Arbeit zerfällt in drei Theile. Im ersten (§ 1—6) sind die ϑ-Functionen, zu denen der Körper $K(z)$ Veranlassung giebt, untersucht, im zweiten (§ 7—14) sind die Wurzelfunctionen des Körpers $K(z)$ bestimmt, und im dritten (§ 15—18) wird unsere Hauptaufgabe gelöst.

§ 1.

Es sei durch eine Gleichung $G(p, q) = 0$ vom Range $\tau = 2$ ein Körper K definirt. Die Gleichung $G(p, q) = 0$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form annehmen

$$q^2 = (p - e_1)(p - e_2) \dots (p - e_6).$$

Es sei ferner $H(p, q)$ eine rationale Function in K. Wir bilden dann durch Adjunction von $z = \sqrt{H(p, q)}$ zu K einen Körper $K(z)$, dessen Rang mit ϱ bezeichnet werden möge. Die rationale Function H kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit in besonderer Form angenommen werden*). Man kann nämlich H durch Multiplication mit dem Quadrate einer rationalen Function von p und q in eine Function verwandeln, die nur an einer Stelle und zwar von gerader Ordnung unendlich, an zwei Stellen je von der zweiten Ordnung und an allen anderen Stellen von der ersten Ordnung Null wird. Es werde nun H unendlich im Punkte π_0 von der Ordnung $2\sigma+2$, Null von der zweiten Ordnung in ϱ_1 und ϱ_2 und Null von der ersten Ordnung in den $N = 2\sigma - 2$ Punkten $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N$.

Betrachten wir p als unabhängige Variable, so sind die 6 Stellen e_α und die N Stellen π_i Verzweigungspunkte in $K(z)$ und nur diese, und zwar alle von der ersten Ordnung. Da aber die Stellen e_α den beiden Zeichen

*) *Schottky*, dieses Journal Bd. 106, S. 206.

von z entsprechend doppelt zu zählen sind, so haben wir im ganzen $N+12 = 2\sigma+10$ Verzweigungspunkte erster Ordnung. Es ist aber p in $K(z)$ eine Function vierter Ordnung. Also ist

$$\varrho = \frac{1}{2}(2\sigma+10)-4+1 = \sigma+2.$$

§ 2.

Wir stellen ein bestimmtes System von ϱ Integralen erster Gattung in $K(z)$ auf. Dazu haben wir ein bestimmtes System von Periodenwegen zu Grunde zu legen. Es giebt $\varrho = \sigma+2$ Paare von Periodenwegen, und zwar schneiden sich die beiden Wege eines Paares in einem Punkte, haben aber mit allen anderen Wegen keinen Punkt gemeinsam. Nun giebt es in dem Körper K zwei Paare von Periodenwegen A_1, B_1 und A_2, B_2. Diese können wir auch als Periodenwege in $K(z)$ betrachten. Wir erhalten aber aus ihnen, den beiden Vorzeichen von z entsprechend, vier Paare von Periodenwegen, die wir mit A_1, B_1; A_2, B_2; $A_{\sigma+1}, B_{\sigma+1}$; $A_{\sigma+2}, B_{\sigma+2}$ bezeichnen wollen, und zwar so, dass sich die Stellen längs A_i, B_i, von denen längs $A_{\sigma+i}, B_{\sigma+i}$ nur durch das Vorzeichen von z unterscheiden. Ausser diesen vier Paaren sind dann noch $\varrho-4 = \sigma-2$ Paare von Periodenwegen vorhanden; diese bezeichnen wir mit $A_i, B_i\,(i = 3, 4, \ldots, \sigma)$. Wir legen ferner jedem Wege A_i und B_i eine bestimmte Richtung bei, die wir die positive nennen. Dabei sollen die Richtungen der Wege A_1, B_1 und $A_{\sigma+1}, B_{\sigma+1}$ und ebenso der Wege A_2, B_2 und $A_{\sigma+2}, B_{\sigma+2}$ als Wege in K betrachtet einander entgegengesetzt sein.

Wir bestimmen nun ϱ linear unabhängige Integrale erster Gattung J_α so, dass der Werth des Integrales J_α erstreckt über den geschlossenen Weg B_β in positivem Sinn gleich 0 ist, wenn α von β verschieden ist, dagegen gleich 1, wenn α gleich β ist. Den Werth des so bestimmten Integrales J_α erstreckt in positiver Richtung über A_β nennen wir $\tau_{\alpha\beta}$. Es bestehen dann die Gleichungen $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$. Aber zufolge der speciellen Voraussetzungen über den Körper $K(z)$ treten zu diesen Gleichungen noch andere hinzu. Diese finden wir auf folgende Art*).

Zu jedem Integral J_α gehört ein conjugirtes, das aus ihm durch Vertauschung von z mit $-z$ entsteht. Wir bezeichnen es mit $\bar{J}_\alpha$. Dies ist

*) *Schottky*, dieses Journal Bd. 106, S. 212.

wieder ein Integral erster Gattung. Wir führen nun zu einem Index α einen conjugirten α' ein, und zwar sei der Reihe nach α' gleich $1, 2, \sigma+1, \sigma+2$, wenn α gleich $\sigma+1, \sigma+2, 1, 2$ ist; im übrigen sei $\alpha' = \alpha$. Ebenso mögen sich die Indices β und β' zu einander verhalten. Wir betrachten jetzt das über $B_{\beta'}$ in positivem Sinne erstreckte Integral $\bar{J}_\alpha$. Ist β von β' verschieden, so sieht man direct, dass dies Integral gleich dem in negativem Sinne über B_β erstreckten Integrale J_α ist. Ist aber $\beta = \beta'$, so ist das in positivem Sinne über $B_{\beta'}$ oder B_β erstreckte Integral $\bar{J}_\alpha$ gleich dem über einen geschlossenen Weg $\bar{B}_\beta$ erstreckten Integral J_α; der Weg $\bar{B}_\beta$ entsteht aus B_β durch Aenderung des Vorzeichens von z. Er bildet mit B_β die volle Begrenzung eines Gebietes in $K(z)$. Das gesuchte Integral ist daher auch in diesem Falle gleich dem in negativem Sinne über B_β erstreckten Integrale J_α. Ebenso sieht man, dass das in positivem Sinne über $A_{\beta'}$ erstreckte Integral $\bar{J}_\alpha$ gleich dem in negativem Sinne über A_β erstreckten Integrale J_α also gleich $-\tau_{\alpha\beta}$ ist.

$\bar{J}_\alpha$ hat demnach längs der Periodenwege B_β integrirt den Werth Null, wenn $\beta \gtrless \alpha'$, und den Werth -1, wenn $\beta = \alpha'$, das heisst aber: es hat dieselben Werthe wie $-J_{\alpha'}$. Daraus folgt, dass das Integral erster Gattung $J_\alpha + J_{\alpha'}$ längs der Periodenwege B_β integrirt immer den Werth Null ergiebt, also constant sein muss. Wir können geradezu setzen

$$\bar{J}_\alpha = -J_{\alpha'}. \tag{1.}$$

Nun ist aber das über $A_{\beta'}$ erstreckte Integral $\bar{J}_\alpha$, wie wir sahen, gleich $-\tau_{\alpha\beta}$, das über $A_{\beta'}$ erstreckte Integral $-J_{\alpha'}$ aber gleich $-\tau_{\alpha'\beta'}$, und da nach Gleichung (1.) beide einander gleich sein müssen, so folgt

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha'\beta'}, \tag{2.}$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Setzen wir jetzt

$$\left.\begin{aligned} M_\alpha &= J_\alpha - J_{\alpha'}, \\ N_\alpha &= J_\alpha + J_{\alpha'}, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$N_\alpha = J_\alpha, \qquad (\alpha = 3, 4, \ldots, \sigma)$$

so erhalten wir $\sigma+2$ linear unabhängige Integrale erster Gattung besonderer Art. Es haben nämlich zufolge der Gleichungen (2.) die Integrale M_α nur vier linear unabhängige Periodicitätsmoduln und sind Integrale des Körpers K;

und die Integrale N_a haben 2σ linear unabhängige Periodicitätsmoduln. Das Periodensystem der M kann in der Form

$$\begin{matrix} 1\,0 & T_{11} & T_{12} \\ 0\,1 & T_{21} & T_{22}, \end{matrix}$$

das der N in der Form

$$\begin{matrix} 1\,0\,0 \ldots 0 & s_{11} & s_{12} \ldots & s_{1\sigma} \\ 0\,1\,0 \ldots 0 & s_{21} & s_{22} \ldots & s_{2\sigma} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 0\,0\,0 \ldots 1 & s_{\sigma 1} & s_{\sigma 2} \ldots & s_{\sigma\sigma} \end{matrix}$$

dargestellt werden, wo die Grössen T und s in einfacher Weise linear aus den $\tau_{\alpha\beta}$ zusammengesetzt sind.

§ 3.

Für das Folgende muss ich auf die Arbeit von Herrn *Schottky* im 106. Bande dieses Journals verweisen, wo in den Paragraphen 7—11 die Herleitung der Formeln, die der folgenden Betrachtung zu Grunde liegen, für allgemeines τ gegeben ist. Ich gebe hier nur das allernothwendigste aus diesen Paragraphen wieder, um den Zusammenhang nicht völlig zu unterbrechen.

Die im vorigen Paragraphen definirten Integrale J, N und M geben Veranlassung zur Definition von ϑ-Functionen von σ, ϱ und 2 Variabeln.

Es sei

$$\chi(\xi_1 \ldots \xi_\varrho) = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \sum_{\beta=1}^{\varrho} \tau_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta,$$

$$\varkappa(\xi_1 \ldots \xi_\sigma) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \sum_{\beta=1}^{\sigma} s_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta,$$

$$H(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} T_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta.$$

Dann definiren wir ϑ-Functionen in folgender Weise:

$$\vartheta(u_1 \ldots u_\varrho;\, \mu, \nu) = \sum_{(n)} e^{\pi i \chi(n_1+\nu_1, \ldots, n_\varrho+\nu_\varrho) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{\varrho} (n_\alpha+\nu_\alpha)(u_\alpha+\mu_\alpha)},$$

$$\varphi(v_1 \ldots v_\sigma;\, \mu, \nu) = \sum_{(n)} e^{\pi i \varkappa(n_1+\nu_1, \ldots, n_\sigma+\nu_\sigma) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{\sigma} (n_\alpha+\nu_\alpha)(v_\alpha+\mu_\alpha)},$$

$$\vartheta(w_1, w_2;\ \mu, \nu) = \sum_{(n)} e^{\pi i H(n_1+\nu_1, n_2+\nu_2) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{2} (n_\alpha+\nu_\alpha)(w_\alpha+\mu_\alpha)},$$

$$\psi(w_1, w_2;\ \mu, \nu) = \sum_{(n)} e^{2\pi i H(n_1+\nu_1, n_2+\nu_2) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{2} (n_\alpha+\nu_\alpha)(w_\alpha+\mu_\alpha)}.$$

Dabei ist immer über alle Systeme ganzer Zahlen n zu summiren. Es möge noch bemerkt werden, dass die von 1 verschiedenen Periodicitätsmoduln der Function $\psi(w_1, w_2)$ doppelt so gross sind als die entsprechenden von $\vartheta(w_1, w_2)$.

Wir bezeichnen ferner durchgehends mit π eine Periodencharakteristik von der Form $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon_1}{2} & \frac{\varepsilon_2}{2} \end{pmatrix}$ und mit ω eine von der Form $\begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{2} & \frac{\delta_2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Charakteristiken gehören zu $\vartheta(w_1, w_2)$ und $\psi(w_1, w_2)$. Wir wollen aber mit denselben Zeichen auch Charakteristiken der Functionen φ und $\vartheta(u_1 \dots u_\varrho)$ bezeichnen. Und zwar sollen diese Charakteristiken definirt sein durch

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \cdots 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1, & \frac{1}{2}\varepsilon_2, & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \cdots 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1, & \frac{1}{2}\varepsilon_2, & 0 \cdots 0, & -\frac{1}{2}\varepsilon_1, & -\frac{1}{2}\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

und durch

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_1, & \frac{1}{2}\delta_2, & 0 \cdots 0 \\ 0, & 0, & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_1, & \frac{1}{2}\delta_2, & 0 \cdots 0, & -\frac{1}{2}\delta_1, & -\frac{1}{2}\delta_2 \\ 0, & 0, & 0 \cdots 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei nun, wenn $\delta, \delta', \delta'', \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ ganze Zahlen bedeuten,

$$\vartheta\left(u_1 \cdots u_\varrho; \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \pm \vartheta_m,$$

$$\varphi\left(v_1 \cdots v_\sigma; \frac{\delta'}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}\right) = \pm \varphi_n,$$

$$\psi\left(w_1, w_2; \frac{\delta''}{2}, \frac{\varepsilon''}{2}\right) = \pm \psi_r.$$

Bezeichnen wir ferner die Periodencharakteristiken

$$\left(0, \frac{1}{2}h\right) \text{ mit } \pi,$$

$$\left(0, \frac{1}{2}e\right) \text{ mit } \pi',$$

$$\left(\frac{g}{2}, 0\right) \text{ mit } \omega,$$

so ist zu setzen

$$\vartheta\left(u_1 \cdots u_\varrho; \frac{\delta+g}{2}, \frac{\varepsilon+h}{2}\right) = \pm \vartheta_{m\pi\omega},$$

$$\varphi\left(v_1 \cdots v_\sigma; \frac{\delta'}{2}, \frac{\varepsilon'+e}{2}\right) = \pm \varphi_{n\pi'},$$

$$\psi\left(w_1, w_2; \frac{\delta''}{2}+g, \frac{\varepsilon''+e+h}{2}\right) = \pm \psi_{r\pi\pi'}.$$

Setzen wir nun fest, dass zwischen den Argumenten u_i, v_i und w_i die Gleichungen bestehen, die zwischen den Integralen J_i, N_i und M_i bestehen, also die Gleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + u_{\sigma+1}, \\ v_2 &= u_2 + u_{\sigma+2}, \\ v_3 &= u_3, \quad v_4 = u_4, \quad \ldots, v_\sigma = u_\sigma, \\ w_1 &= u_1 - u_{\sigma+1}, \\ w_2 &= u_2 - u_{\sigma+2}, \end{aligned}$$

und ferner, dass zwischen den drei Reihen ganzer Zahlen

$$\delta_i, \varepsilon_i; \qquad \delta_i', \varepsilon_i'; \qquad \delta_i'', \varepsilon_i''$$

die in der *Schottky*schen Arbeit S. 227 unter 2 verzeichneten Gleichungen bestehen, so haben wir das Gleichungssystem*)

$$(3.) \qquad \pm \vartheta_{m\pi\omega} = \sum_{(\pi')} (\pi')\,(\pi'|\omega)\,\varphi_{n\pi'}\,\psi_{r\pi\pi'},$$

(π) und $(\pi|\omega)$ sind Vorzeichen. Das Zeichen $(\pi|\omega)$, das wir auch im Folgenden zum Zwecke bequemerer Schreibweise öfters verwenden wollen, ist so definirt. Es sei $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon_1}{2} & \frac{\varepsilon_2}{2} \end{pmatrix}$, $\omega = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{2} & \frac{\delta_2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$(\pi|\omega) = (-1)^{\varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2}.$$

Die Vorzeichen (π) sind von keiner weiteren Bedeutung für unsere Zwecke. Ihre Bedeutung ist aus der *Schottky*schen Arbeit (S. 229) zu ersehen.

Das Gleichungssystem (3.) haben wir unseren weiteren Betrachtungen zu Grunde zu legen. Es ist aber zu bemerken, dass es nur für solche Functionen ϑ_m gilt, für die alle Functionen $\vartheta_{m\omega}$, wo ω irgend eine der Periodencharakteristiken der oben angegebenen Art ist, entweder gleichzeitig gerade oder ungerade sind.

§ 4.

In unserem Falle giebt es je vier Periodencharakteristiken π und ω. Wir bezeichnen sie so:

---

*) *Schottky*, dieses Journal Bd. 106, S. 230, 9.

$$\pi_0 = \omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},\ \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \omega_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sodass also $\pi_1 \pi_2 \pi_3 = \omega_1 \omega_2 \omega_3 = \pi_0 = \omega_0$ wird.

Es wird dann zufolge der Definition

$$(4.)\quad \begin{cases} (\pi_0|\omega_i) = (\pi_i|\omega_0) = 1, & (i = 0, \ldots, 3) \\ (\pi_1|\omega_1) = -1, \quad (\pi_1|\omega_2) = +1, \quad (\pi_1|\omega_3) = -1, \\ (\pi_2|\omega_1) = +1, \quad (\pi_2|\omega_2) = -1, \quad (\pi_2|\omega_3) = -1, \\ (\pi_3|\omega_1) = -1, \quad (\pi_3|\omega_2) = -1, \quad (\pi_3|\omega_3) = +1. \end{cases}$$

Setzen wir ferner die unwesentlichen Vorzeichen

$$(\pi_1) = \delta, \qquad (\pi_2) = \varepsilon, \qquad (\pi_3) = (\pi_1)(\pi_2) = \varepsilon\delta,$$

so erhalten wir aus der Gleichung (3.) durch Specialisiren von π und ω folgendes System von 16 Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} \vartheta_m = \varphi_n \psi_r + \delta \varphi_{n\pi_1} \psi_{r\pi_1} + \varepsilon \varphi_{n\pi_2} \psi_{r\pi_2} + \delta\varepsilon \varphi_{n\pi_3} \psi_{r\pi_3}, \\ \vartheta_{m\omega_1} = \varphi_n \psi_r - \delta \varphi_{n\pi_1} \psi_{r\pi_1} + \varepsilon \varphi_{n\pi_2} \psi_{r\pi_2} - \delta\varepsilon \varphi_{n\pi_3} \psi_{r\pi_3}, \\ \vartheta_{m\omega_2} = \varphi_n \psi_r + \delta \varphi_{n\pi_1} \psi_{r\pi_1} - \varepsilon \varphi_{n\pi_2} \psi_{r\pi_2} - \delta\varepsilon \varphi_{n\pi_3} \psi_{r\pi_3}, \\ \vartheta_{m\omega_3} = \varphi_n \psi_r - \delta \varphi_{n\pi_1} \psi_{r\pi_1} - \varepsilon \varphi_{n\pi_2} \psi_{r\pi_2} + \delta\varepsilon \varphi_{n\pi_3} \psi_{r\pi_3}. \end{cases}$$

Die anderen 12 Gleichungen dieses Systems erhält man, indem man m der Reihe nach durch $m\pi_1, m\pi_2, m\pi_3$ ersetzt und gleichzeitig r durch $r\pi_1, r\pi_2, r\pi_3$ und beobachtet, dass $\pi_1 \pi_2 \pi_3 = \pi_0 = 0$ ist.

Die 16 in dem System (5.) vorkommenden Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ nennen wir (nach Herrn *Schottky*) verwandt.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder sind nämlich die 16 Functionen $\vartheta_{m\pi_\alpha\omega_\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, \ldots, 3)$ alle vom gleichen Charakter oder die eine Hälfte ist gerade, die andere ungerade. Es sei, um dies genauer zu untersuchen, die Charakteristik von ϑ_m gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_1, & \frac{1}{2}\delta_2 \ldots & \frac{1}{2}\delta_\varrho \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1, & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \ldots & \frac{1}{2}\varepsilon_\varrho \end{pmatrix}$$

und es sei zur Abkürzung

$$\sum_{a=1}^{\varrho} \delta_a \varepsilon_a = a.$$

Dann ist ϑ_m gerade oder ungerade, jenachdem a gerade oder ungerade ist. Ferner sei irgend eine der Charakteristiken $\pi\omega$ gleich $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}g_1, & \frac{1}{2}g_2 \\ \frac{1}{2}h_1, & \frac{1}{2}h_2 \end{pmatrix}$. Dann ist die Charakteristik von $\vartheta_{m\pi\omega}$ (siehe § 3) gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{2}g_1, \frac{1}{2}\delta_2+\frac{1}{2}g_2, \frac{1}{2}\delta_3 \cdots \frac{1}{2}\delta_{\varrho-2}, \frac{1}{2}\delta_{\varrho-1}-\frac{1}{2}g_1, \frac{1}{2}\delta_\varrho-\frac{1}{2}g_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{1}{2}h_1, \frac{1}{2}\varepsilon_2+\frac{1}{2}h_2, \frac{1}{2}\varepsilon_3 \cdots \frac{1}{2}\varepsilon_{\varrho-2}, \frac{1}{2}\varepsilon_{\varrho-1}-\frac{1}{2}h_1, \frac{1}{2}\varepsilon_\varrho-\frac{1}{2}h_2 \end{pmatrix},$$

$\vartheta_{m\pi\omega}$ ist also gerade oder ungerade, jenachdem

$$a+g_1(\varepsilon_1-\varepsilon_{\varrho-1})+g_2(\varepsilon_2-\varepsilon_\varrho)+h_1(\delta_1-\delta_{\varrho-1})+h_2(\delta_1-\delta_\varrho)$$

gerade oder ungerade ist. Wie sich demnach die Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ zu ϑ_m verhalten, hängt wesentlich von der Charakteristik

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\delta_1-\delta_{\varrho-1}), & \frac{1}{2}(\delta_2-\delta_\varrho) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_{\varrho-1}), & \frac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_\varrho) \end{pmatrix}$$

ab.

Wir sagen deshalb, ϑ_m gehört zu dieser Charakteristik. Es gehört also ϑ_m immer zu einer der Charakteristiken $\pi_\alpha\omega_\beta$. Und man findet, gehört ϑ_m zur Charakteristik 0, so haben alle 16 Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ denselben Charakter (Fall I). Gehört aber ϑ_m zu einer von 0 verschiedenen Charakteristik, so sind 8 der Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ gerade und 8 ungerade (Fall II). Es sind hier freilich die Perioden $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ bevorzugt; denn nur, wenn ϑ_m zu einer dieser Perioden gehört, haben die Functionen $\vartheta_{m\omega}$ denselben Charakter, sodass nur dann das Gleichungssystem (5.) gilt.

§ 5.

I. Betrachten wir zunächst den Fall, wo alle Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ denselben Charakter haben. Aus dem Gleichungssystem (5, § 4) folgt:

$$(6.) \quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_{m\pi_1}+\vartheta_{m\pi_1\omega_1}+\vartheta_{m\pi_1\omega_2}+\vartheta_{m\pi_1\omega_3}}{\vartheta_m+\vartheta_{m\omega_1}+\vartheta_{m\omega_2}+\vartheta_{m\omega_3}} = \dfrac{\psi_{r\pi_1}}{\psi_r}, \\ \dfrac{\vartheta_{m\pi_1}-\vartheta_{m\pi_1\omega_1}+\vartheta_{m\pi_1\omega_2}-\vartheta_{m\pi_1\omega_3}}{\vartheta_m+\vartheta_{m\omega_1}+\vartheta_{m\omega_2}+\vartheta_{m\omega_3}} = \delta\dfrac{\varphi_{n\pi_1}}{\varphi_n}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise lassen sich alle Quotienten $\frac{\psi_{r\pi}}{\psi_r}$ und $\frac{\varphi_{n\pi}}{\varphi_n}$ ausdrücken. Da nun im Falle I die links stehenden Quotienten gerade Functionen sind, so sind die Functionen $\psi_{r\pi}$ von demselben Charakter und ebenso die Functionen $\varphi_{n\pi}$.

Wir wollen nun für die Functionen ψ und die zum Körper K gehörenden Thetafunctionen mit zweitheiliger Charakteristik eine bestimmte Bezeichnung festsetzen. Jede dieser Functionen hat eine bestimmte Charakteristik. Alle 16 Charakteristiken können wir aber aus den Charakteristiken $\pi_0 = \omega_0$, π_α, ω_α zusammensetzen. Hat nun eine der Functionen z. B. die Charakteristik $\pi_\alpha \omega_\beta$, so bezeichnen wir sie mit $\psi_{\pi_\alpha \omega_\beta}$ und $\vartheta_{\pi_\alpha \omega_\beta}$. Dabei wollen wir ψ_{π_0} und ϑ_{π_0} auch mit ψ und ϑ bezeichnen. Im Folgenden ist eine Tabelle der Periodencharakteristiken mit der zugehörigen Bezeichnung gegeben. Dabei sind die ungeraden Charakteristiken umrahmt

(7.)

$$\left\{\begin{array}{llll}
\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \pi_0 = \omega_0 & \left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \omega_1 & \left(\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \omega_2 & \left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \omega_3 = \omega_1\omega_2 \\
\left(\begin{smallmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}\right) = \pi_1 & \boxed{\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}\right) = \pi_1\omega_1} & \left(\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}\right) = \pi_1\omega_2 & \boxed{\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}\right) = \pi_1\omega_3} \\
\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right) = \pi_2 & \left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right) = \pi_2\omega_1 & \boxed{\left(\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right) = \pi_2\omega_2} & \boxed{\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right) = \pi_2\omega_3} \\
\left(\begin{smallmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right) = \pi_3 & \boxed{\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right) = \pi_3\omega_1} & \boxed{\left(\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right) = \pi_3\omega_2} & \left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right) = \pi_3\omega_3.
\end{array}\right.$$

Wir kehren nun zu unseren Betrachtungen über den Fall I zurück. Die vier Functionen $\psi_{r\pi_i}$ haben hier denselben Charakter. Die 4 Charakteristiken $r\pi_i$ müssen also auch gleichartig sein. Nun lehrt ein Blick auf die Tabelle (7.), in der immer die vier durch Hinzufügen der π_i zu einer Charakteristik entstehenden Charakteristiken in einer Verticalreihe stehen, dass die vier Charakteristiken $r\pi_i$ mit denen der ersten Verticalreihe identisch sein müssen. Da es auf die Reihenfolge nicht ankommt, so können wir r gleich π_0 setzen. Die vier Functionen $\psi_{r\pi_i}$ werden im Falle I demnach gerade Functionen. Dann folgt aus den Gleichungen (5.), § 4, dass die Functionen $\varphi_{n\pi_i}$ gerade oder ungerade sind, jenachdem die Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ gerade oder ungerade sind.

II. Wir gehen zu dem Fall über, wo ϑ_m der Gruppe ω_1 angehört. Es sei etwa ϑ_m ungerade. Man findet, dass dann die Functionen $\vartheta_{m\omega_i}$ und $\vartheta_{m\pi_2\omega_i}$ $(i = 0, \ldots, 3)$ ungerade, die anderen gerade sind. (Siehe Seite 9). Dann müssen nach den Gleichungen (6.) und den analogen die Quotienten

$$\frac{\psi_{r\pi_1}}{\psi_r}, \quad \frac{\psi_{r\pi_3}}{\psi_r}, \quad \frac{\varphi_{n\pi_1}}{\varphi_n}, \quad \frac{\varphi_{n\pi_3}}{\varphi_n}$$

ungerade, dagegen die Quotienten

$$\frac{\psi_{r\pi_2}}{\psi_r}, \quad \frac{\varphi_{n\pi_2}}{\varphi_r}$$

gerade Functionen sein. Es müssen also etwa ψ_r und $\psi_{r\pi_2}$ gerade und $\psi_{r\pi_1}$ und $\psi_{r\pi_3}$ ungerade sein. Aus der Tabelle (7.) sieht man, da $r\pi_0$ und $r\pi_2$ gleichartige Charakteristiken sein müssen, dass nur die Charakteristiken der zweiten Verticalreihe in Frage kommen. Sollen ausserdem $r\pi_0$ und $r\pi_2$ gerade sein, so muss r gleich ω_1 oder $\pi_2\omega_1$ sein. Da es auch hier auf die Reihenfolge nicht ankommt, so können wir $r = \omega_1$ setzen. Für die anderen von Null verschiedenen Perioden wird analoges gelten, so dass wir sie nicht besonders zu behandeln brauchen.

Es möge noch bemerkt werden, dass über die Anfangsglieder der Functionen ϑ_m und φ_n ganz analoge Sätze gelten wie im Falle $\tau = 1$*).

§ 6.

Wir leiten noch eine Formel ab, durch die wir eine der Functionen $\vartheta(u_1 \ldots u_\varrho)$ durch vier ihrer Verwandten ausdrücken können, etwa $\vartheta_{m\pi_1}$ durch ϑ_m, $\vartheta_{m\omega_1}$, $\vartheta_{m\omega_2}$, $\vartheta_{m\omega_3}$.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\psi_r = x, \quad \psi_{r\pi_1} = y, \quad \psi_{r\pi_2} = z, \quad \psi_{r\pi_3} = u.$$

Dann lautet die erste von den nicht hingeschriebenen Gleichungen (5.), § 4

$$\vartheta_{m\pi_1} = \varphi_n y + \delta \varphi_{n\pi_1} x + \varepsilon \varphi_{n\pi_2} u + \varepsilon\delta \varphi_{n\pi_3} z.$$

Multipliciren wir ferner die vier ersten der Gleichungen (5.), § 4 der Reihe nach mit λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, und addiren, so bekommen wir

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=0}^{3} \lambda_\alpha \vartheta_{m\omega_\alpha} = {} & (\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\, x\, \varphi_n + \delta(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\, y\, \varphi_{n\pi_1} \\ & + \varepsilon(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\, z\, \varphi_{n\pi_2} + \varepsilon\delta(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\, u\, \varphi_{n\pi_3}\end{aligned}$$

*) *Schottky*, dieses Journal Bd. 106.

und dies wird identisch mit $\vartheta_{m\pi_1}$, wenn folgende Gleichungen bestehen

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \frac{y}{x},$$

$$\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 = \frac{x}{y},$$

$$\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 = \frac{u}{z},$$

$$\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 = \frac{z}{u};$$

hieraus folgt

$$4\,\lambda_0\,xyzu = (xu+yz)(uy+xz),$$
$$4\,\lambda_1\,xyzu = (xu+yz)(uy-xz),$$
$$4\,\lambda_2\,xyzu = (zy-xu)(uy-xz),$$
$$4\,\lambda_3\,xyzu = (zy-xu)(uy+xz).$$

Zwischen den Functionen ψ und den zum Körper K gehörenden Thetafunctionen $\vartheta(w_1, w_2)$ oder $\vartheta((w))$, wie wir kürzer schreiben wollen, bestehen aber Gleichungen*). Solche Gleichungen sind z. B. in unsrer Bezeichnung

$$(8.)\qquad \sum_{i=0}^{3} (\pi_i|\omega_a)\,\psi_{\pi_i}((w))\,\psi_{\pi_i\pi_\beta}((w)) = \vartheta_{\omega_a\pi_\beta}((0))\,\vartheta_{\omega_a\pi_\beta}((w))$$

$(\pi|\omega)$ bedeutet das früher ((4.) § 4) definirte Vorzeichen. Durch Vermehren der Argumente um halbe Perioden ω_γ kann man aus diesen Gleichungen noch andere ableiten.

Im besonderen erhalten wir für den Fall I, wo die Grössen x, y, z, u identisch mit $\psi_{\pi_0}, \psi_{\pi_1}, \psi_{\pi_2}, \psi_{\pi_3}$ sind, aus den Gleichungen (8.) durch Specialisiren von ω_a und π_β die Gleichungen

$$2\,(xu+yz) = \vartheta_{\pi_3}((0))\,\vartheta_{\pi_3}((w)),$$
$$2\,(xu-yz) = \vartheta_{\pi_3\omega_3}((0))\,\vartheta_{\pi_3\omega_3}((w)),$$
$$2\,(xz+yu) = \vartheta_{\pi_2}((0))\,\vartheta_{\pi_2}((w)),$$
$$2\,(xz-yu) = \vartheta_{\pi_2\omega_1}((0))\,\vartheta_{\pi_2\omega_1}((w));$$

---

*) Man sehe z. B. ***Krause,*** Transformation der hyperelliptischen Functionen (Leipzig) § 10 Formel 2 u. 3.

hieraus folgt noch

$$16\,xyzu = \vartheta^2_{\pi_2}((0))\,\vartheta^2_{\pi_3}((w)) - \vartheta^2_{\pi_3\omega_3}((0))\,\vartheta^2_{\pi_3\omega_3}((w))$$
$$= \vartheta^2_{\pi_2}((0))\,\vartheta^2_{\pi_3}((w)) - \vartheta^2_{\pi_2\omega_1}((0))\,\vartheta^2_{\pi_2\omega_1}((w)).$$

Mit Benutzung dieser Gleichungen bekommen wir im Fall I die Formel

$$[\vartheta^2_{\pi_2}((0))\,\vartheta^2_{\pi_3}((w)) - \vartheta^2_{\pi_2\omega_1}((0))\,\vartheta^2_{\pi_3\omega_1}((w))]\,\vartheta_{m\pi_1}(u_1 \dots u_\varrho)$$
$$= \vartheta_{\pi_2}((0))\,\vartheta_{\pi_3}((0))\,\vartheta_{\pi_2}((w))\,\vartheta_{\pi_3}((w))\,\vartheta_m$$
$$- \vartheta_{\pi_3}((0))\,\vartheta_{\pi_3\omega_1}((0))\,\vartheta_{\pi_3}((w))\,\vartheta_{\pi_2\omega_1}((w))\,\vartheta_{m\omega_1}$$
$$+ \vartheta_{\pi_2\omega_1}((0))\,\vartheta_{\pi_3\omega_3}((0))\,\vartheta_{\pi_2\omega_1}((w))\,\vartheta_{\pi_3\omega_3}((w))\,\vartheta_{m\omega_2}$$
$$- \vartheta_{\pi_3\omega_3}((0))\,\vartheta_{\pi_2}((0))\,\vartheta_{\pi_3\omega_3}((w))\,\vartheta_{\pi_2}((w))\,\vartheta_{m\omega_3},$$

wo die ϑ-Functionen, bei denen die Argumente fortgelassen sind, die Argumente $u_1 \dots u_\varrho$ haben. Aehnlich bekommt man im Falle II, wenn ϑ_m zu ω_1 gehört, die Gleichung

$$(9).\quad \left\{\begin{array}{l} [\vartheta^2_{\pi_3}((0))\,\vartheta^2_{\pi_3}((w)) - \vartheta^2_{\pi_3\omega_3}((0))\,\vartheta^2_{\pi_3\omega_3}((w))]\,\vartheta_{m\pi_1}(u_1 \dots u_\varrho) \\ \quad = \vartheta_{\pi_2}((0))\,\vartheta_{\pi_3}((0))\,\vartheta_{\pi_2\omega_1}((w))\,\vartheta_{\pi_3\omega_1}((w))\,\vartheta_m \\ \qquad - \vartheta_{\pi_3}((0))\,\vartheta_{\pi_2\omega_1}((0))\,\vartheta_{\pi_3\omega_1}((w))\,\vartheta_{\pi_2}((w))\,\vartheta_{m\omega_1} \\ - \vartheta_{\pi_2\omega_1}((0))\,\vartheta_{\pi_3\omega_3}((0))\,\vartheta_{\pi_2}((w))\,\vartheta_{\pi_3\omega_2}((w))\,\vartheta_{m\omega_2} \\ \qquad + \vartheta_{\pi_3\omega_3}((0))\,\vartheta_{\pi_2}((0))\,\vartheta_{\pi_3\omega_2}((w))\,\vartheta_{\pi_2\omega_1}((w))\,\vartheta_{m\omega_3}. \end{array}\right.$$

Weitere derartige Gleichungen kann man aus diesen durch Vermehren der Argumente um halbe Perioden ableiten.

§ 7.

Wir wollen nun aus den aufgestellten Gleichungen die Werthe der Functionen $\varphi_{n\pi}$ bestimmen für den Fall, dass für die Argumente Integrale erster Gattung gesetzt werden. *Die* Functionen ϑ_m, die mit den Argumenten von höherer als der ersten Ordnung verschwinden, werden dann identisch Null. Von den anderen werden die ungeraden gleich einem gemeinsamen transcendenten Factor multiplicirt mit den Werthen einer bestimmten Wurzelfunction für die obere und untere Grenze der Integrale erster Gattung. Es soll nun zunächst unsere Aufgabe sein, diese Wurzelfunctionen zu bestimmen.

Wir haben zu diesem Zwecke im Körper $K(z)$ alle Differentiale erster Gattung zu bestimmen, deren Nullstellen paarweise zusammenfallen. Denn, sind du_1, du_2, ... solche Differentiale, so sind die Grössen $\sqrt{du_1}$, $\sqrt{du_2}$, ... den Wurzelfunctionen proportional.

Zunächst ist die Form eines Differentials erster Gattung überhaupt festzustellen. Jedes Differential aus $K(z)$ kann in der Form geschrieben werden

$$du = dw + \frac{dv}{z},$$

wo dv und dw Differentiale aus K sind. Soll du ein Differential erster Gattung sein, so muss auch $dw - \frac{dv}{z}$ ein solches sein, also auch dw und $\frac{dv}{z}$. dw ist demnach ein Differential erster Gattung aus K. Solcher giebt es zwei linear unabhängige. dv wird ein Differential zweiter Gattung in K. Dies Differential dv muss für die Stellen ϱ_1 und ϱ_2, für die z von der ersten Ordnung verschwindet, auch von der ersten Ordnung Null werden. Ausserdem muss dv im Unendlichen von der zweiten Ordnung verschwinden. Unendlich werden kann dv an der Stelle π_0 von derselben Ordnung wie z, also von der Ordnung $\sigma+1$. Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass jedes Differential dv, dv_1, dv_2 ... die hier angegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen hat, ohne es jedesmal besonders hinzuzufügen. Das allgemeinste dv hat $\sigma+1$ Unendlichkeitsstellen, also $\sigma+1+2\tau+2 = \sigma+7$ Nullstellen. Von diesen sind $2+2\cdot 2 = 6$ vorgeschrieben, sodass noch $\sigma+1$ übrig bleiben. Es giebt also $\sigma+1-\tau+1 = \sigma$ linear unabhängige Differentiale dv. Die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung in $K(z)$ ist folglich im ganzen $\sigma+2 = \varrho$, wie es sein muss.

Wir haben nun dv und dw so zu bestimmen, dass du nur von gerader Ordnung Null wird. Dabei machen wir erst die Annahme, dass dw identisch verschwindet, und dann, dass dw nicht identisch verschwindet. Wir werden sehen, dass wir für beide Annahmen Lösungen unserer Aufgabe bekommen.

§ 8.

Es sei dw identisch Null. Es wird $du = \frac{dv}{z}$, das Differential dv ist so zu bestimmen, dass es in $K(z)$ ausser an den Stellen ϱ_1 und ϱ_2 nur von gerader Ordnung verschwindet. Als Differential in K betrachtet, kann dv aber von der ersten Ordnung verschwinden, nämlich an den Nullstellen $\pi_1, \ldots, \pi_N$ von $z^2 = H$. Von den Nullstellen von dv sind noch $\sigma+1$ zu bestimmen. Wir nehmen an, es werde dv von der ersten Ordnung an den l Stellen $\pi_\alpha, \pi_\beta \ldots, \pi_\lambda$ und ausserdem noch an k Stellen von der zweiten Ordnung Null. Dann muss $l+2k = \sigma+1$ sein, also

$$l \equiv \sigma - 1 \pmod 2.$$

Es handelt sich nun darum, ob sich nach Wahl von $\pi_a, \ldots, \pi_\lambda$ die noch fehlenden k Nullstellen passend bestimmen lassen und auf wie viel Arten. Der grösste Werth, den l annehmen kann, ist $\sigma+1$. Aber es wird bei allgemeinem $H(p, q)$ nicht $\sigma+1$ Nullstellen von H geben, so dass ein Differential dv ausser an den einmal festliegenden Nullstellen nur an diesen $\sigma+1$ Stellen verschwindet. Wir können also annehmen, dass keine $\sigma+1$ Stellen von H diese Eigenschaft haben. Dann ist auf jeden Fall $l \leqq \sigma-1$. Aber auch gleich $\sigma-1$ kann l im allgemeinen nicht sein. Man kann zwar, da der Rang von K gleich 2 ist, dv so bestimmen, dass es an irgend $\sigma-1$ Nullstellen von H verschwindet. Es verschwindet dann ausserdem noch an zwei fest bestimmten anderen Stellen. Diese werden aber im allgemeinen nicht zusammenfallen. Wir nehmen daher an

$$l < \sigma - 1.$$

Ueber den Fall $l = \sigma-1$ sehe man die Anmerkung.

Es seien nun $l < \sigma-1$ Nullstellen $\pi_a, \ldots, \pi_\lambda$ von H ausgewählt und es sei $l \equiv \sigma-1 \pmod 2$. Eine solche Combination von l Nullstellen von H, wo nämlich $l < \sigma-1$ und $l \equiv \sigma-1 \pmod 2$, wollen wir wesentlich nennen und etwa mit c bezeichnen. Bestimmen wir nun das allgemeinste Differential dv, das an den Nullstellen c verschwindet, so enthält es noch hinreichend willkürliche lineare Coefficienten, dass man erreichen kann, dass dv an den übrigen Nullstellen von der zweiten Ordnung verschwindet,

---

Anmerkung. Es werde etwa dv an den $\sigma-1$ Stellen $\pi_1, \ldots, \pi_{\sigma-1}$ von der ersten und an der Stelle a von der zweiten Ordnung Null; dann giebt es ein Differential erster Gattung dw, dass in a und ausserdem noch in einem zweiten Punkte a_1 verschwindet; und es wird $dv_1 = \dfrac{H\,dw^2}{dv}$ ein Differential von der Art der Differentiale dv, das an den $\sigma-1$ Stellen $\pi_{\sigma+1}, \pi_{\sigma+2}, \ldots, \pi_N$ von der ersten und an der Stelle a_1 von der zweiten Ordnung verschwindet. Wir bekommen also die beiden Wurzelfunctionen $\sqrt{\dfrac{dv}{z}}$ und $\sqrt{\dfrac{dv_1}{z}}$. Der Quotient dieser beiden Functionen ist $\sqrt{\dfrac{dv_1}{dv}} = \dfrac{z}{\dfrac{dv}{dw}}$, also rational in $K(z)$. Es ist demnach auch jede lineare homogene Verbindung $\alpha\sqrt{\dfrac{dv}{z}} + \beta\sqrt{\dfrac{dv_1}{z}}$ eine Wurzelfunction.

Dieser Ausnahmefall ist dadurch charakterisirt, dass sich $H\,dw^2$ in das Product zweier Differentiale dv zerlegen lässt. Diese Möglichkeit wollen wir ausschliessen.

und zwar auf mehrere Arten. Es seien $dv, dv_1, \ldots$ Differentiale, die an den Nullstellen c und ausserdem nur von der zweiten Ordnung verschwinden. Dann sind die Quotienten $\frac{dv_1}{dv}, \ldots$ rationale Functionen in K, die an k Stellen von der zweiten Ordnung verschwinden und an k Stellen von der zweiten Ordnung unendlich werden. Die Functionen $\sqrt{\frac{dv_1}{dv}}, \ldots$ sind also Functionen, die an k Stellen Null und an k Stellen unendlich werden und sich überall wie eine rationale Function in K verhalten. Sie müssen demnach entweder rational sein oder aber, da die Quadrate sicher rational sind, gleich dem Producte einer rationalen Function mit einer der 15 Grössen $\sqrt{(p-e_\alpha)\,(p-e_\beta)}$ $(\alpha \gtrless \beta = 1, \ldots 6)$, für die wir zur Abkürzung $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$ schreiben wollen.

Haben wir demnach c gewählt und ein dv bestimmt, so finden wir die anderen auf folgende Weise. Wir bestimmen zunächst alle rationalen Functionen in K, die an den k Stellen von der ersten Ordnung unendlich werden, an denen dv von der zweiten Ordnung verschwindet. Solcher giebt es $k-1$ linear unabhängige, unter ihnen die Constante, etwa die Functionen $1, r_1, \ldots, r_{k-2}$. Wir bekommen so die $k-1$ linear unabhängigen Wurzelfunctionen

$$\sqrt{\frac{dv}{z}},\ r_1\sqrt{\frac{dv}{z}}, \ldots, r_{k-2}\sqrt{\frac{dv}{z}},$$

von denen je zwei einen rationalen (sogar in K) Quotienten haben. Und jede lineare homogene Verbindung von ihnen liefert immer eine Wurzelfunction.

Dann wählen wir irgend eine der 15 Grössen $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$ und bestimmen alle rationalen Functionen in K, die durch $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$ theilbar sind und ausserdem von der ersten Ordnung an *den* k Stellen unendlich werden, an denen dv von der zweiten Ordnung Null wird. Solcher Functionen giebt es $k-1$ linear unabhängige, etwa $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$. Ihnen entsprechen die Wurzelfunctionen

$$\frac{s_1}{\sqrt{p_{\alpha\beta}}}\sqrt{\frac{dv}{z}}, \ldots, \frac{s_{k-1}}{\sqrt{p_{\alpha\beta}}}\sqrt{\frac{dv}{z}}.$$

Zu einer wesentlichen Combination c gehören also im ganzen 16 Reihen von je $k-1$ linear unabhängigen Wurzelfunctionen. Der Quotient irgend zweier der Wurzelfunctionen ist entweder rational, und zwar,

wenn beide derselben Reihe angehören, oder das Product einer rationalen Function mit einer der Grössen $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$ und zwar, wenn beide verschiedenen Reihen angehören.

Wir erhalten auf diese Weise alle Wurzelfunctionen, bei denen dw identisch Null ist. Wir sagen von ihnen, sie gehören zur Periode 0.

§ 9.

Die wirkliche Bestimmung der Wurzelfunctionen der Periode 0 hat keine besonderen Schwierigkeiten, da es sich um die Bestimmung von rationalen Functionen in dem ziemlich einfachen Körper $K(p, q)$ handelt. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen. Nur für den Fall, wo $l = \sigma - 3$, also $k = 2$ wird, wollen wir der späteren Verwendung wegen eine Darstellung der Wurzelfunctionen mit Hülfe der zum Körper K gehörenden ϑ-Functionen und Integrale erster Gattung geben.

Wir bezeichnen die beiden in § 2 definirten Integrale erster Gattung M_1 und M_2, erstreckt von der Unendlichkeitsstelle π_0 von $z^2 = H$ bis zu irgend einer Stelle π mit $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$. Ferner setzen wir

$$\int_{\pi_0}^{\pi_\alpha} dt^{(i)} = t_\alpha^{(i)}, \quad \int_{\pi_0}^{\varrho_\alpha} dt^{(i)} = r_\alpha^{(i)} \qquad (i = 1, 2)$$

und führen als Primfactor zur Darstellung der Wurzelfunctionen die Grösse ein

$$L(t^{(1)} - t^{(1)'},\ t^{(2)} - t^{(2)'}) = \frac{a_{\pi_1\omega_1}\, \vartheta_{\pi_1\omega_1}(t^{(1)} - t^{(1)'},\ t^{(2)} - t^{(2)'})}{\sqrt{p - e_\alpha}\ \sqrt{p' - e_\alpha}},$$

die bei geeigneter Wahl der Constanten $a_{\pi_1\omega_1}$ und des Index α unabhängig von dem gewählten Index $\pi_1\omega_1$ wird. Wir bezeichnen diese Function im Folgenden immer abgekürzt mit

$$L((t - t')).$$

$L((t-t'))$ wird von der ersten Ordnung Null an der Stelle π' und im Unendlichen für beide Werthe von q von der Ordnung $\frac{1}{2}$, wird aber nirgends unendlich. Um aber dv passend zu bestimmen, haben wir $l = \sigma - 3$ Nullstellen von H auszuwählen. Wir nehmen z. B. $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\sigma-3}$. Dann können wir setzen

$$q\frac{dv}{dp} = \frac{L((t - r_1))\, L((t - r_2)) \prod_{\alpha=1}^{\sigma-3} L((t - t_\alpha))}{L((t))^{\sigma+1}}\, \vartheta_\mu^2\left(t^{(1)} + \frac{s^{(1)}}{2}, t^{(2)} + \frac{s^{(2)}}{2}\right),$$

wobei, damit wir eine rationale Function bekommen,

$$s^{(i)} = r_1^{(i)} + r_2^{(i)} + \sum_{\alpha=1}^{\sigma-3} t_\alpha^{(i)} \qquad (i = 1, 2)$$

sein muss. Da μ irgend einen der 16 Indices bezeichnen kann, bekommen wir 16 solcher Functionen.

Wir könnten nun $\sqrt{\frac{dv}{z}}$ direct als Wurzelfunction betrachten. Wir wollen aber der Einfachheit wegen einen Factor absondern. Es sei zur Abkürzung

$$P((t)) = \prod_{\alpha=1}^{\sigma-3} L((t-t_\alpha)),$$

$$\vartheta_\mu\left(t^{(1)} + \frac{s^{(1)}}{2},\ t^{(2)} + \frac{s^{(2)}}{2}\right) = \vartheta_\mu\left(\!\!\left(t + \frac{s}{2}\right)\!\!\right);$$

dann nehmen wir als Wurzelfunctionen die 16 Functionen

$$W = \sqrt{P((t))}\,\vartheta_\mu\left(\!\!\left(t + \frac{s}{2}\right)\!\!\right).$$

Bedenken wir, dass wir $z^2 = H$ in der Form darstellen können

$$H(p, q) = \frac{L^2((t-r_1))\, L^2((t-r_2)) \prod_{\alpha=1}^{N} L((t-t_\alpha))}{L((t))^{2\sigma+2}},$$

so sehen wir, dass W aus $\sqrt{\frac{dv}{z}}$ durch Multiplication mit

$$\sqrt{\frac{q}{dp}} \cdot \sqrt[4]{L((t-t_1))\ L((t-t_2)) \ldots L((t-t_N))}$$

hervorgeht.

Der Quotient je zweier der gefundenen Wurzelfunctionen ist rational bis auf einen Factor $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$, ganz übereinstimmend mit den in § 8 gefundenen allgemeinen Resultaten.

§ 10.

Wir betrachten nun den Fall, dass dw nicht identisch Null ist. Es wird $du = dw + \frac{dv}{z}$ oder $z\,du = z\,dw + dv$ und es sind dw und dv so zu bestimmen, dass $z\,du$ ausser an den Stellen ϱ_1 und ϱ_2 überall von der zweiten Ordnung verschwindet und zwar in $K(z)$. Aber man sieht, dass $z\,du$ auch als Function in K betrachtet überall ausser für ϱ_1 und ϱ_2 von der zweiten

Ordnung verschwinden muss. Denn $z\,du$ kann im allgemeinen nicht für eine der Nullstellen π_α von z von der zweiten Ordnung verschwinden. Dasselbe gilt von $-z\,du_1 = -z\,dw + dv$. Es wird also das Product

$$(dv + z\,dw)\,(dv - z\,dw) = dv^2 - z^2\,dw^2$$

ein Differentialausdruck in K, der überall von gerader Ordnung verschwindet, auch an den Stellen ϱ_1 und ϱ_2 und im Unendlichen, und der auch nur von gerader Ordnung unendlich wird, nämlich an den Stellen $e_1, \ldots, e_6$ von der zweiten und an der Stelle π_0 von der $(2\sigma+2)$-ten Ordnung. Wir können demnach setzen

$$dv^2 - z^2\,dw^2 = dv^2 - H dw^2 = dt^2,$$

wo dt ein Differential von K ist, das sich überall wie eine rationale Function verhält. dt wird im allgemeinen kein rationales Differential sein. Denn es folgt aus der Definitionsgleichung für dt die Gleichung

$$(dv + dt)\,(dv - dt) = H dw^2.$$

Wäre nun dt rational, so wären, wie man leicht sieht, $dv+dt$ und $dv-dt$ Differentiale von der Art der Differentiale dv. Es würde also Hdw^2 in das Product zweier solcher Differentiale zerlegbar, ein Fall, den wir schon oben ausgeschlossen haben (§ 8, Anm.). Da aber dt^2 rational ist, so wird auf jeden Fall dt nach Multiplication mit einem der 15 Ausdrücke

$$\sqrt{p_{\alpha\beta}} \quad (\alpha \gtrless \beta = 1, 2, \ldots, 6)$$

rational. Es gehört also dt einem der Körper $K_{\alpha\beta}$ an, die aus K durch Adjunction von $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$ entstehen. Wir können uns auf einen dieser Körper beschränken, da für die anderen analoges gelten wird. Wir beschränken uns auf den Körper K_{56}.

Wir setzen $(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)(p-e_4) = p_{1234}$, $\sqrt{p_{56}} = q_2$ und $\sqrt{p_{1234}} = q_3$, wobei immer das Zeichen von q_3 so bestimmt sein soll, dass $q = q_2\,q_3$ ist. Jede Function R von K_{56} lässt sich in der Form darstellen

$$R = r + r_1\,q + r_2\,q_2 + r_3\,q_3,$$

wo die r rationale Functionen von p allein sind und zwar dann und nur dann ganze, wenn R ganz ist. Zwei Grössen in K_{56}, die sich nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{p_{56}}$ unterscheiden, nennen wir conjugirt. So ist die zu R conjugirte Function $R^1 = r + r_1\,q - r_2\,q_2 - r_3\,q_3$ und das Product beider,

die Norm von R, wird eine Function von K. Der Rang von K_{56} ist gleich drei, da es die drei linear unabhängigen Differentiale erster Gattung

$$\frac{dp}{q}, \quad \frac{p\,dp}{q}, \quad \frac{dp}{q_3}$$

und nur diese drei in ihm giebt.

Wir haben nun in K_{56} zwei conjugirte Differentiale $da = dv + dt$ und $db = dv - dt$ und ein Differential dw in K so zu bestimmen, dass

$$da\,db = H dw^2$$

wird. da und db haben jedenfalls folgende Null- und Unendlichkeitsstellen:

Sie werden unendlich in π_0 und zwar für beide Werthe von q_2 von der Ordnung $\sigma+1$. Sie werden Null, und zwar auch für beide Werthe von q_2 an den Stellen ϱ_1 und ϱ_2 von der ersten Ordnung und verhalten sich ausserdem wie ein Differential erster Gattung.

Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass da und db die angegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen haben, ohne sie jedes Mal anzuführen. da und db besitzen ausser den angegebenen keine Unendlichkeitsstellen, wohl aber noch Nullstellen, und zwar beide gleich viel. Aus der Gleichung

$$da\,db = H dw^2$$

folgt, dass da und db für die Nullstellen π_α von H und für die Nullstellen von dw^2 noch verschwinden müssen. Nun entsprechen jeder Nullstelle π_α von H zwei conjugirte Stellen π'_α und π''_α in K_{56}. Wird da an der einen Null, so muss db an der anderen Null werden. Zwei conjugirte Stellen in K_{56} sind immer von einander verschieden. Da ferner H an den Stellen π_α nur von der ersten Ordnung Null wird, so können da und db nur dann eine gemeinsame Nullstelle haben (abgesehen von ϱ_1, ϱ_2 und der unendlich fernen Stelle), wenn für diese Nullstelle dw verschwindet.

Wir haben nun alle solche Combinationen von je $2\sigma-2$ der Nullstellen, an denen H in K_{56} verschwindet, zu bilden, in denen von zwei conjugirten Stellen π'_α und π''_α nur die eine vorkommt. Diese Combinationen denken wir uns mit Indices bezeichnet, und zwar immer zwei Combinationen, die zusammen alle Nullstellen von H enthalten, mit demselben Index. Es sei m eine dieser Combinationen. Wir haben zu sehen, ob wir ein Differential da bestimmen können, das an den in m enthaltenen Stellen verschwindet, und zwar so, dass die Norm von da, nämlich $da \cdot db$ gleich $H dw^2$ wird.

da wird ausser an den Stellen in m noch an vier Stellen zu Null. Da K_{56} vom Range 3 ist, so giebt es also zwei linear unabhängige Differentiale da, die an den in der Combination m enthaltenen Stellen verschwinden, oder das allgemeinste Differential da, das an den Stellen der Combination m verschwindet, enthält eine wesentliche Constante. Ebenso ist es mit dem conjugirten Differential db. Ist nun dw irgend ein Differential erster Gattung in K, so wird $\frac{da \cdot db}{H dw^2}$ eine rationale Function in K, die nur an den Nullstellen von dw unendlich wird und deshalb das Product zweier φ-Functionen aus K sein muss, etwa gleich $\varphi_1 \cdot \varphi_2$. Da φ_1 und φ_2 nur für die Nullstellen von dw unendlich werden, so werden $\varphi_1 dw = dw_1$ und $\varphi_2 dw = dw_2$ Differentiale erster Gattung, und es ist demnach, wenn da und db in der oben angegebenen Weise bestimmt sind, immer

$$da\, db = H dw_1 \cdot dw_2.$$

Die in da und db vorkommende wesentliche Constante kann aber immer so bestimmt werden, dass $dw_1 = dw_2$ wird. Wir nehmen an, das sei geschehen, und setzen den gemeinsamen Werth von dw_1 und dw_2 gleich dw, dann ist

$$da \cdot db = H dw^2.$$

Erinnern wir uns wieder der Bedeutung von da und db. Es war

$$da = dv + dt,$$

$$db = dv - dt,$$

also

$$dv = \frac{1}{2}(da + db)$$

ferner

$$dw = \pm \sqrt{\frac{da\, db}{H}} = \pm \frac{\sqrt{da\, db}}{z}$$

und also

$$du = \frac{1}{2z}(\sqrt{da} \pm \sqrt{db})^2,$$

$$\sqrt{du} = \frac{1}{\sqrt{2z}}(\sqrt{da} \pm \sqrt{db}).$$

Wenn der Combination m eine Wurzelfunction entspricht, so wird $\sqrt{du}$ diese sein. Aber es ist noch zu untersuchen, ob $\sqrt{du}$ immer eine

Wurzelfunction ist. $\sqrt{du}$ ist dann und nur dann eine Wurzelfunction, wenn es an seinen Nullstellen sich wie eine rationale Function von K_{56} verhält. Das ist sicher dann der Fall, wenn da und db keine gemeinsame Nullstelle haben. Es braucht aber nicht der Fall zu sein, wenn da und db eine oder mehrere gemeinsame Nullstellen haben. Wie wir schon oben sahen, ist eine da und db gemeinsame Nullstelle auch Nullstelle von dw. Nun werde dw Null für p gleich c; es sei also $dw = \frac{(p-c)\,dp}{q}$. Als Differential von K_{56} betrachtet, wird dw an vier Stellen Null, nämlich an den vier Stellen, an denen p den Werth c hat. An diesen Stellen müssen auch da und db Null werden, und zwar so, dass da an der einen und db an der anderen von zwei conjugirten Stellen verschwindet und dass die Gesamtheit dieser Nullstellen die Nullstellen von dw^2 ausmacht. Es sind daher folgende drei Fälle denkbar:

1. da verschwindet für die vier Stellen, an denen $p = c$ ist, von der ersten Ordnung;

2. da verschwindet für eine von diesen vier Stellen von der zweiten Ordnung und für zwei von der ersten;

3. da verschwindet für zwei von diesen vier Stellen von der zweiten Ordnung.

§ 11.

1. Wir betrachten zunächst den Fall 1. da und db werden an den Nullstellen von dw Null. $\frac{da}{dw}$ und $\frac{db}{dw}$ werden also rationale Functionen in K_{56}, die nur in π_0 unendlich werden und die an den Stellen ϱ_1, ϱ_2 und an den Stellen der Combination m Null werden. Sie sind also durch m (wenn überhaupt solche Functionen existiren) vollkommen bestimmt. Es wird $\frac{da}{dw} \cdot \frac{db}{dw} = H$. Der Fall 1 ist also dadurch charakterisirt, dass sich H in zwei rationale Functionen von K_{56} zerlegen lässt, die nur in π_0 unendlich werden, und er tritt so oft ein, als dies möglich ist. Im allgemeinen wird das überhaupt nicht möglich sein. Der Fall 1 ist ein Ausnahmefall. Es wird

$$\sqrt{du} = \frac{1}{\sqrt{2z}} \left\{ \sqrt{\frac{da}{dw}} \pm \sqrt{\frac{db}{dw}} \right\} \sqrt{dw};$$

$\sqrt{\frac{da}{dw}}$ und $\sqrt{\frac{db}{dw}}$ haben ausser den Stellen ϱ_1 und ϱ_2 keine gemeinsamen Null-

stellen. $\sqrt{du}$ wird folglich dann eine Wurzelfunction sein, wenn $\sqrt{dw}$ sich rational an seinen Nullstellen verhält, also eine Wurzelfunction aus K ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{2z}}\left\{\sqrt{\frac{da}{dw}}+\sqrt{\frac{db}{dw}}\right\}=A$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2z}}\left\{\sqrt{\frac{da}{dw}}-\sqrt{\frac{db}{dw}}\right\}=B,$$

ferner

$$\frac{p-e_\alpha}{q}\,dp=dw_\alpha \quad (\alpha=1,\ldots,6),$$

so erhalten wir folgende zu m gehörende Wurzelfunctionen

$$A\sqrt{dw_\alpha} \text{ und } B\sqrt{dw_\alpha} \quad (\alpha=1,\ldots,6).$$

Da

$$\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{\frac{da}{dw}}+\sqrt{\frac{db}{dw}}}{\sqrt{\frac{da}{dw}}-\sqrt{\frac{db}{dw}}}=\frac{\left\{\sqrt{\frac{da}{dw}}+\sqrt{\frac{db}{dw}}\right\}^2}{\frac{da}{dw}-\frac{db}{dw}}=\frac{2z\frac{du}{dw}}{2\frac{dt}{dw}},$$

also gleich einer rationalen Function aus $K(z)$ multiplicirt mit $\sqrt{p_{56}}$ ist, so sieht man leicht, dass $A\sqrt{dw_5}$ und $B\sqrt{dw_6}$ Wurzelfunctionen sind, deren Quotient rational ist, so dass jeder Ausdruck von der Form $\alpha A\sqrt{dw_5}+\beta B\sqrt{dw_6}$ eine Wurzelfunction darstellt. Dasselbe gilt von $A\sqrt{dw_6}$ und $B\sqrt{dw_5}$. Der Quotient irgend zweier anderen der Wurzelfunctionen wird aber nicht rational, sondern gleich dem Producte einer rationalen Function mit einer der 15 Grössen $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$.

2. Wir betrachten den Fall 2. In diesem Falle haben da und db gewiss eine gemeinsame Nullstelle. An dieser könnte sich $\sqrt{da}+\sqrt{db}$ nur dann wie eine rationale Function verhalten, wenn sie eine der Verzweigungsstellen e_α wäre. Einer solchen Stelle entsprechen aber in K_{56} nur zwei Stellen, und da da im Falle 2 für $p=c$ an einer Stelle von der zweiten und an zwei Stellen von der ersten Ordnung, also an drei verschiedenen Stellen verschwinden soll, so kann c nicht gleich einer der Grössen e_α sein. Entspricht also der Combination m der Fall 2, so erhält man keine Wurzelfunctionen.

3. Wir gehen zum dritten Falle über. da und db haben keinen gemeinsamen Theiler. $\sqrt{du}$ ist immer eine Wurzelfunction. Es handelt sich noch darum zu bestimmen, wie viel Wurzelfunctionen zu einer Combination m im Falle 3 gehören. Man möge die Differentiale $da, da_1, \ldots$ und die dazu conjugirten $db, db_1, \ldots$ erhalten. Die Functionen $\frac{da_\alpha}{da}$, $\frac{db_\alpha}{db}$ sind dann rationale Functionen vierter Ordnung in K_{56}, die für $p = c$ an zwei Stellen von der zweiten Ordnung unendlich werden und an zwei Stellen von der zweiten Ordnung Null werden, für die p auch denselben Werth hat, etwa c_α. Die Norm von $\frac{da_\alpha}{da}$ d. i. $\frac{da_\alpha}{da} \cdot \frac{db_\alpha}{db}$ wird eine rationale Function von K, die für $p = c_\alpha$ von der zweiten Ordnung Null und für $p = c$ von der zweiten Ordnung unendlich wird. Sie ist daher bis auf einen constanten Factor gleich $\frac{(p-c_\alpha)^2}{(p-c)^2}$. Nehmen wir an, da und damit c seien bekannt, so können wir die Functionen $\frac{da_\alpha}{da}, \ldots$ bestimmen. Wir können setzen

$$\frac{da_\alpha}{da} = \frac{r + r_1 q + r_2 q_2 + r_3 q_3}{(p-c)^2},$$

und es müssen die r ganze rationale Functionen von p sein. Da $\frac{da_\alpha}{da}$ im Unendlichen endlich bleiben muss, so ist $r_1 = 0$, r_3 eine Constante, r_2 vom ersten und r vom zweiten Grade. Nun wird

$$\frac{db_\alpha}{db} = \frac{r - r_2 q_2 - r_3 q_3}{(p-c)^2},$$

und da $\frac{da_\alpha}{da} \cdot \frac{db_\alpha}{db}$ rational in p wird, also kein Glied mit dem Factor $q_2 q_3 = q$ enthalten darf, so folgt, dass $r_2 r_3 = 0$ sein muss. Also entweder $r_2 = 0$ oder $r_3 = 0$. Ist $r_3 = 0$, so wird

$$\frac{da_\alpha}{da} = \frac{r + r_2 q_2}{(p-c)^2}.$$

Es wird also da für $p = c$ an zwei Stellen von der zweiten Ordnung Null, für die q_2 dasselbe Zeichen hat, q_3 aber das entgegengesetzte. Dasselbe gilt von db und analoges von da_α und db_α. Es ist aber

$$d\mu = \frac{(p-c)^2}{\left(\sqrt{p_5 (c-e_6)} + \sqrt{p_6 (c-e_5)}\right)^2} \frac{dp}{q}$$

ein Differential aus K_{56}, das dieselbe Eigenschaft wie da und db hat. Ist $d\lambda$ das zu $d\mu$ konjugirte Differential, so werden bei geeigneter Bezeichnung

$\frac{da}{d\lambda}$ und $\frac{db}{d\mu}$ rationale Functionen in K_{56}, die nur in π_0 unendlich werden, und da ausserdem $\frac{da}{d\lambda}\frac{db}{d\mu} = \frac{H\,dw^2}{d\lambda\,d\mu} = \text{Const. } H$ wird, so sehen wir, dass für $r_3 = 0$ H in der im Falle 1 angegebenen Weise zerlegbar wird. Wir kommen also auf einem anderen Wege wieder zum Fall 1. Wir können uns daher hier auf den Fall beschränken, dass $r_2 = 0$ wird.

Dann ist

$$\frac{da_\alpha}{da} = \frac{r + r_3 q_3}{(p-c)^2}.$$

Hier ist r_3 eine Constante und r eine quadratische Function von p. r ist so zu bestimmen, dass $r + r_3 q_3$ für $p = c$ und ein bestimmtes Vorzeichen von q_3 von der zweiten Ordnung Null wird. Dadurch ist $\frac{da_\alpha}{da}$ bis auf einen constanten Factor bestimmt, zwar nicht eindeutig, aber nur endlich vieldeutig. Man erhält nämlich folgende Functionen, in denen $c_{\alpha\beta}$ den Werth bezeichnet, den $p_{\alpha\beta}$ für $p = c$ annimmt:

$$\left\{\frac{\sqrt{p_{34}\,c_{12}} \pm \sqrt{p_{12}\,c_{34}}}{p-c}\right\}^2$$

und die analogen. Entsprechend den drei Zerlegungen 12, 34; 13, 24; 14, 23 der Periode 1234 giebt es drei solcher Functionen und die dazu conjugirten. Wir führen für die Functionen $\sqrt{\frac{da_\alpha}{da}}$ und $\sqrt{\frac{db_\alpha}{db}}$ folgende Bezeichnung ein

$$+h_{12} = +h_{34} = \frac{\sqrt{c_{34}\,p_{12}} + \sqrt{c_{12}\,p_{34}}}{p-c},$$

$$-g_{12} = +g_{34} = \frac{\sqrt{c_{12}\,p_{34}} - \sqrt{c_{34}\,p_{12}}}{p-c}$$

und entsprechend seien h_{13}, $g_{13}\ldots$ definirt. Bei passender Wahl der Vorzeichen ist dann h_{12} gleich einer der Functionen $\sqrt{\frac{da_\alpha}{da}}$ und g_{12} gleich der conjugirten $\sqrt{\frac{db_\alpha}{db}}$.

Ist nun m gewählt und da und damit c bekannt, so erhalten wir

unter der Annahme, dass der Fall 3 vorliegt, folgende Wurzelfunctionen:

$$\frac{\sqrt{da} \pm \sqrt{db}}{\sqrt{2z}}.$$

$$\frac{h_{12}\sqrt{da} \pm g_{12}\sqrt{db}}{\sqrt{2z}}$$

und die analogen, im ganzen acht. Es ist zu vermuthen, dass diese acht zu m gehörenden Wurzelfunctionen Quotienten haben, die, wie das bei den bis jetzt behandelten Fällen war, entweder rational sind oder bis auf einen Factor $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$ rational sind. Diese Vermuthung bestätigt sich.

Zunächst sieht man, dass

$$\frac{\sqrt{da}+\sqrt{db}}{\sqrt{da}-\sqrt{db}} = \frac{da-db}{(\sqrt{da}-\sqrt{db})^2} = \frac{dt}{z\,du}$$

bis auf den Factor $\sqrt{p_{56}}$ rational ist. Ferner wird z. B.

$$\frac{h_{12}\sqrt{da}+g_{12}\sqrt{db}}{\sqrt{da}+\sqrt{db}}$$

$$= \frac{h_{12}\,da+g_{12}\,db+\sqrt{da\,db}\,(h_{12}+g_{12})}{(\sqrt{da}+\sqrt{db})^2}.$$

Das ist bis auf einen rationalen Factor gleich

$$h_{12}\,da+g_{12}\,db+\sqrt{da\,db}\,(h_{12}+g_{12});$$

setzen wir $da = d\overline{w}+\sqrt{p_{56}}\,d\overline{w}_1$, wo wir $d\overline{w}$ und $d\overline{w}_1$ rational annehmen können, so wird $db = d\overline{w}-\sqrt{p_{56}}\,d\overline{w}_1$ und der betrachtete Quotient bis auf einen rationalen Factor gleich

$$\sqrt{p_{12}\,c_{34}}\,d\overline{w}+\sqrt{p_{3456}\,c_{12}}\,d\overline{w}_1+z\sqrt{p_{12}\,c_{34}}\,dw,$$

also rational bis auf den Factor $\sqrt{p_{12}}$. Analoges gilt von den anderen Quotienten. Rational wird der Quotient in diesem Falle für keine zwei der zu m gehörenden Functionen.

Damit sind alle Fälle erschöpft. Wir sagen von den in § 10 und § 11 behandelten Wurzelfunctionen, sie gehören zur Periode 56. Ganz analog sind die Verhältnisse für die zu den anderen 14 von Null verschiedenen Perioden $\alpha\beta$ gehörenden Wurzelfunctionen.

§ 12.

Es bleibt noch zu entscheiden, für wie viel Combinationen m die Fälle 1, 2 oder 3 eintreten. Da der Fall 1, wie wir sahen, auch im Fall 3 enthalten ist, so können wir uns darauf beschränken, festzustellen, wie oft der Fall 2 und wie oft der Fall 3 eintritt. Wir erhalten dann auch sofort die Anzahl der Combinationen, denen Wurzelfunctionen entsprechen. Denn wir sahen, dass dem Falle 3 immer Wurzelfunctionen entsprechen, dem Falle 2 aber nicht.

Es seien m und m_1 zwei verschiedene Combinationen der Nullstellen π'_a, π''_a von H und zwar solche, dass von zwei conjugirten Stellen immer eine und nur eine aufgenommen ist. Dann können wir immer zwei Differentiale da und da_1 so bestimmen, dass sie ausser an den Stellen von m und m_1 je nur noch für einen Werth von p verschwinden, etwa da für $p = c$ und da_1 für $p = c_1$. Es ist zu untersuchen, wann da für $p = c$ und da_1 für $p = c_1$ an zwei Stellen von der zweiten Ordnung und wann an einer Stelle von der zweiten und an zweien von der ersten Ordnung verschwindet. m und m_1 mögen in ϱ Stellen verschieden sein; es enthalte etwa m die Stellen $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_\varrho$ und also m_1 die Stellen $\pi''_1, \pi''_2, \ldots, \pi''_\varrho$, während die anderen Stellen von m und m_1 dieselben sind. Die Function $\frac{da_1}{da}$ hat dann die Stellen $\pi''_1, \ldots, \pi''_\varrho$ zu Null- und die conjugirten $\pi'_1, \ldots, \pi'_\varrho$ zu Unendlichkeitsstellen. Umgekehrt ist es bei der conjugirten Function $\frac{db_1}{db}$. Ausser diesen Null- und Unendlichkeitsstellen haben $\frac{da_1}{da}$ und $\frac{db_1}{db}$ nur noch die Null- und Unendlichkeitsstellen, für die $p = c_1$ oder gleich c ist. Die Norm von $\frac{da_1}{da}$, nämlich $\frac{da_1}{da} \cdot \frac{db_1}{db}$, wird demnach nur für $p = c$ unendlich und für $p = c_1$ Null, und zwar beidemal von der zweiten Ordnung und für beide Werthe von q, ist also gleich Const. $\left(\frac{p-c_1}{p-c}\right)^2$.

Nun sei p an der Stelle π_a gleich ∂_a und ferner

$$\frac{da_1}{da} = \frac{r + r_1 q + r_2 q_2 + r_3 q_3}{(p-\partial_1)\ldots(p-\partial_\varrho)(p-c)^2}.$$

Dann müssen die r ganze Functionen von p sein. Es wird

$$\frac{db_1}{db} = \frac{r + r_1 q - r_2 q_2 - r_3 q_3}{(p-\partial_1)\ldots(p-\partial_\varrho)(p-c)^2}.$$

Da $\frac{da_1}{da} \cdot \frac{db_1}{db}$ rational in p wird, also kein Glied mit dem Factor q enthalten darf, so wird

$$r r_1 = r_2 r_3.$$

Wir können also etwa setzen

$$r_2 = g_2 \cdot h_2, \quad r_3 = g_3 \cdot h_3$$

mit der Bestimmung, dass

$$g_2 h_3 = r \quad \text{und} \quad h_2 g_3 = r_1$$

ist. Dann wird

$$(p-\partial_1) \dots (p-\partial_\varrho)\,(p-c)^2 \frac{da_1}{da}$$
$$= (g_2 + g_3 q_3)\,(h_3 + h_2 q_2).$$

Man erkennt aus dieser Herleitung den allgemeinen Satz, den wir später benutzen werden, dass nämlich eine Function in K_{56}, deren Norm eine rationale Function von p ist, in das Product einer Function aus $K(p, q_2)$ und einer aus $K(p, q_3)$ zerfällt.

Aus der Gleichung

$$\frac{da_1}{da} \cdot \frac{db_1}{db} = \text{Const.} \left(\frac{p-c_1}{p-c}\right)^2$$

folgt

$$(g_2^2 - g_3^2 q_3^2)\,(h_3^2 - h_2^2 q_2^2)$$
$$= (p-\partial_1)^2\,(p-\partial_2)^2 \dots (p-\partial_\varrho)^2\,(p-c)^2\,(p-c_1)^2.$$

Soll nun $\frac{da_1}{da}$ für $p = \partial_1$ nur an einer der diesem Werthe entsprechenden vier Stellen unendlich und an einer anderen Null werden, wie es sein muss, so muss für $p = \partial_1$ $g_2 + g_3 q_3$ oder $g_2 - g_3 q_3$ und gleichzeitig $h_3 + h_2 q_2$ oder $h_3 - h_2 q_2$ verschwinden. Auf jeden Fall werden die Functionen $g_2^2 - g_3^2 q_3^2$ und $h_3^2 - h_2^2 q_2^2$ beide durch $p - \partial_1$ theilbar. Ebenso sind sie beide theilbar durch $p-\partial_2, \dots, p-\partial_\varrho$.

Ist ferner da für $p = c$ an zwei Stellen von der zweiten Ordnung Null, also $\frac{da_1}{da}$ an zwei Stellen von der zweiten Ordnung unendlich, so muss $g_2 \pm g_3 q_3$ oder $h_3 \pm h_2 q_2$ für $p = c$ von der zweiten Ordnung verschwinden. Es ist also einer der beiden Factoren $g_2^2 - g_3^2 q_3^2$ und $h_3^2 - h_2^2 q_2^2$ durch $(p-c)^2$ theilbar. Ist aber da für $p = c$ an einer Stelle von der zweiten Ordnung

und an zwei Stellen von der ersten Null und demnach $\frac{da_1}{da}$ in entsprechender Weise unendlich, so enthält jeder der Factoren $g_2^2-g_3^2q_3^2$ und $h_3^2-h_2^2q_2^2$ den Factor $p-c$. Gehört also zu m der Fall 3, so ist nur eine der Functionen $g_2^2-g_3^2q_3^2$ und $h_3^2-h_2^2q_2^2$ durch $p-c$ theilbar, sonst beide. Aehnlich verhält sich es mit m_1 und c_1. Nun sind die Functionen $g_2^2-g_3^2q_3^2$ und $h_3^2-h_2^2q_2^2$ aber sicher von gerader Ordnung, da sonst $\frac{da_1}{da}$ im Unendlichen eine Nullstelle hätte. Andererseits ist aber der Grad dieser Functionen congruent ϱ (mod 2), wenn beide durch $p-c$ und durch $p-c_1$ oder wenn nur eine durch $(p-c)^2$ und auch nur eine durch $(p-c_1)^2$ theilbar ist, wenn also m und m_1 demselben Fall entsprechen. Dagegen ist der Grad der Functionen nach dem Modul 2 mit $\varrho+1$ congruent, wenn m und m_1 verschiedenen Fällen entsprechen.

Also auch umgekehrt:

Ist ϱ gerade, d. h. sind m und m_1 in einer geraden Anzahl Stellen verschieden, so entsprechen entweder m und m_1 Wurzelfunctionen oder beiden entsprechen keine.

Ist dagegen ϱ ungerade, d. h. unterscheiden sich m nnd m_1 in einer ungeraden Anzahl Stellen, so entsprechen der einen Combination Wurzelfunctionen und der anderen nicht.

Wir nennen die Combinationen, denen Wurzelfunctionen entsprechen, wesentlich. Ist dann m eine wesentliche Combination, so ist jede Combination, die sich von m durch eine gerade Anzahl von Stellen unterscheidet, wieder wesentlich, alle anderen nicht. Danach ist die Hälfte aller Combinationen m wesentlich, die andere Hälfte nicht.

§ 13.

Wir wollen nun auch für die Wurzelfunctionen der Periode 56 eine geschlossene Darstellung geben. Es sei also eine wesentliche Combination m ausgewählt. Es handelt sich um die Bestimmung von da und db oder $\frac{da}{db}$. Die Norm dieser Function ist $\frac{da}{db}\cdot\frac{db}{da}=1$. Nun hat sich bei Gelegenheit der Betrachtung der Function $\frac{da_1}{da}$ in § 12 gezeigt, dass eine Function in K_{56}, deren Norm kein Glied mit q enthält, in das Product einer Function des elliptischen Körpers $K(p, q_3)$ und einer Function des Körpers $K(p, q_2)$ vom

Range Null zerfällt. Daher kommt es, dass wir die Function $\frac{da}{db}$ verhältnissmässig einfach darstellen können. Wir wollen in folgender Weise verfahren:

Wir setzen

$$u = c \int_{e_1} \frac{dp}{\sqrt{p_{1234}}},$$

wo die Constante c so bestimmt sein soll, dass die eine Periode von u gleich 1 wird. Dann führen wir die vier zu $K(p, q_3)$ gehörenden ϑ-Functionen ein. Wir bezeichnen sie mit $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u), \sigma_4(u)$ und es sei $\sigma_1(u)$ die ungerade Function. Genauer sei

$$\sigma_1(u) = \vartheta(u;\ 1,1),\ \sigma_2(u) = \vartheta(u;\ 0,0)$$
$$\sigma_3(u) = \vartheta(u;\ 1,0),\ \sigma_4(u) = \vartheta(u;\ 0,1).$$

Die von Eins verschiedene Periode sei ω. Sie sei so gewählt, dass die Function σ_α der Grösse $\sqrt{p - e_\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, 4)$ proportional wird.

Wir setzen, wenn π' irgend eine Stelle in K_{56} bezeichnet und also auch in $K(p, q_3)$,

$$\int_{e_1}^{\pi'} du = u'.$$

Dann wird, wenn π'' die in K_{56} zu π' conjugirte Stelle ist, die auch in $K(p, q_3)$ zu π' conjugirt ist, bei geeigneter Wahl des Integrationsweges

$$\int_{e_1}^{\pi''} du = -u'.$$

Die Function $\frac{da}{db}$ hat die Eigenschaft, dass ihre Unendlichkeitsstellen zu den Nullstellen conjugirt sind. Nun lassen sich aber Primfunctionen*) bilden, die nur an einer Stelle in K_{56} Null werden und an der conjugirten unendlich. Aus solchen Primfunctionen können wir dann $\frac{da}{db}$ zusammensetzen. Es sei nämlich π_α eine der einfachen Nullstellen von $H = z^2$. Ihr entsprechen in K_{56} zwei conjugirte Stellen π'_α, π''_α. Der Werth von u an der einen Stelle sei μ_α, an der anderen also $-\mu_\alpha$, der von p, der an beiden Stellen der nämliche ist, sei $p^{(\alpha)}$. Zur Abkürzung sei noch $p^{(\alpha)} - e_\beta = p_\beta^{(\alpha)}$. Dann betrachten wir die beiden Functionen

*) Auf solche Primfunctionen machte mich Herr *Schottky* aufmerksam.

$$l_1 = \frac{\sigma_1(u-\mu_a)}{\sqrt{\sigma_1(u-\bar{u})\,\sigma_1(u+\bar{u})}} \cdot \frac{a}{\sqrt{p_5\,p_6^{(a)}} - \sqrt{p_5^{(a)}\,p_6}},$$

$$l_2 = \frac{\sigma_1(u+\mu_a)}{\sqrt{\sigma_1(u-\bar{u})\,\sigma_1(u+\bar{u})}} \cdot \frac{a}{\sqrt{p_5\,p_6^{(a)}} + \sqrt{p_5^{(a)}\,p_6}}.$$

Hierin bedeutet $\bar{u}$ den Werth von u für unendliches p und a ist eine Constante. Von den beiden Functionen l_1 und l_2 wird die eine an der Stelle π'_a Null und in π''_a unendlich; bei der anderen ist es umgekehrt. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Vorzeichen von $\sqrt{p_5^{(a)}}$ und $\sqrt{p_6^{(a)}}$ passend bestimmt sind. Das Product $l_1 l_2$ wird demnach constant. Wir können a so bestimmt annehmen, dass $l_1 l_2 = 1$ wird. Um die beiden Functionen genauer zu unterscheiden verfahren wir so. Wir denken uns einen geschlossenen Weg gegeben, der in der p-Ebene verläuft und e_5 und e_6 einschliesst, aber keinen der Punkte $p^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$. Ferner denken wir uns für einen der Punkte dieses Weges das Vorzeichen von $\sqrt{p_5\,p_6}$ festgesetzt. Dann ist ein ganz bestimmter geschlossener Weg im Körper $K(p, \sqrt{p_{56}})$ definirt, den wir γ nennen wollen. Lassen wir p den Weg γ einmal durchlaufen, so ändern sich in l_1 und l_2 nur die Grössen $\sqrt{p_5\,p_6^{(a)}} + \sqrt{p_5^{(a)}\,p_6}$ und $\sqrt{p_5\,p_6^{(a)}} - \sqrt{p_5^{(a)}\,p_6}$ und zwar nehmen sie den Factor $e^{\pi i}$ oder $e^{-\pi i}$ an. Es ist aber das Product der beiden Grössen gleich $(e_5 - e_6)(p - p_a)$, ändert sich also garnicht bei dem Durchlaufen des Weges γ, da γ den Punkt p_a nicht einschliessen soll. Daraus folgt, dass die eine der beiden Grössen den Factor $e^{+\pi i}$, die andere den Factor $e^{-\pi i}$ annimmt. Ebenso ist es dann mit den Functionen l_1 und l_2. Wir bezeichnen *die* der beiden Functionen l_1 und l_2, die den Factor $e^{+\pi i}$ annimmt, wenn p den Weg γ in einem ganz bestimmt festgesetzten Sinne – er möge positiv heissen – durchläuft, mit g'_a und ihre Nullstelle mit π'_a, die andere Function aber mit g''_a und ihre Nullstelle mit π''_a.

Wir gehen nun zur Darstellung der Function $\frac{da}{db}$ über. Diese Function wird an N Stellen von der ersten Ordnung Null, nämlich an N von den $2N$ Stellen $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_N, \pi''_1, \pi''_2, \ldots, \pi''_N$ jedoch immer nur an *einer* von zwei conjugirten Stellen π'_a und π''_a. $\frac{da}{db}$ möge etwa an den Stellen

$$\pi'_1, \pi'_2 \ldots, \pi'_\lambda, \pi''_{\lambda+1} \ldots, \pi''_N$$

Null werden. Ausserdem wird $\frac{da}{db}$ noch an zwei Stellen von der zweiten Ordnung Null. Für diese hat p denselben Werth, ebenso q_3 und also auch u,

dagegen q_2 entgegengesetzte Werthe (§ 11). Die Unendlichkeitsstellen sind die conjugirten der Nullstellen. Danach haben wir

$$\frac{da}{db} = \prod_{\alpha=1}^{\lambda} g'_\alpha \prod_{\alpha=\lambda+1}^{N} g''_\alpha \cdot \frac{\sigma_\mu^2(u-\lambda)}{\sigma_\mu^2(u+\lambda)},$$

dabei ist λ aus der Gleichung

$$4\lambda + \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha = 0$$

zu bestimmen, damit $\frac{da}{db}$ rational wird. Da μ jeden der Indices 1, 2, 3, 4 bedeuten kann, bekommen wir zu jeder Wahl der Nullstellen π'_α, π''_α von $\frac{da}{db}$ vier Functionen.

Es sei nun zur Abkürzung

$$\prod_{\alpha=1}^{\lambda} g'_\alpha \prod_{\alpha=\lambda+1}^{N} g''_\alpha = F_1$$

und die conjugirte Function

$$\prod_{\alpha=1}^{\lambda} g''_\alpha \prod_{\alpha=\lambda+1}^{N} g'_\alpha = G_1;$$

dann wird

$$\frac{da}{db} = F_1 \frac{\sigma_\mu^2(u-\lambda)}{\sigma_\mu^2(u+\lambda)}, \quad \frac{db}{da} = G_1 \frac{\sigma_\mu^2(u+\lambda)}{\sigma_\mu^2(u-\lambda)}.$$

Ferner ist aber

$$da \cdot db = H dw^2,$$

wo zu setzen ist

$$dw = \frac{\sigma_\mu(u+\lambda)\,\sigma_\mu(u-\lambda)}{\sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})} \frac{dp}{q},$$

danach wird

$$da = z\sqrt{F_1} \frac{\sigma_\mu^2(u-\lambda)}{\sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})} \frac{dp}{q}, \quad db = z\sqrt{G_1} \frac{\sigma_\mu^2(u+\lambda)}{\sigma_1(u-\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})} \frac{dp}{q}.$$

Diese Ausdrücke müssen rational in K_{56} sein. Sie dürfen sich also nicht ändern, wenn z. B. p den früher definirten Weg γ etwa in positivem Sinne durchläuft. Dann aber nimmt jedes g' den Factor $e^{\pi i}$ und jedes g'' den Factor $e^{-\pi i}$ an, $\sqrt{F_1}$ also den Factor $e^{\frac{\pi i \lambda}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi i (N-\lambda)}{2}} = e^{\pi i(\lambda-\sigma+1)}$. Daraus folgt,

dass die Anzahl λ der Nullstellen π'_a von $\frac{da}{db}$ nicht ganz willkürlich ist, sondern dass sein muss

$$\lambda \equiv \sigma - 1 \pmod 2.$$

Danach ist eine wesentliche Combination der Nullstellen π'_a, π''_a dadurch charakterisirt, dass immer von zwei conjugirten Nullstellen eine und nur eine in ihr enthalten ist und dass die Anzahl der in ihr enthaltenen Nullstellen π'_a (und dann ebenso auch die der Nullstellen π''_a) mit $\sigma - 1$ nach dem Modul 2 congruent ist. Es ergiebt sich auch hier, wie früher (§ 12), dass die Hälfte aller Combinationen von N Stellen, die immer nur eine von zwei conjugirten Stellen enthalten, wesentlich ist.

Wir hätten jetzt als Wurzelfunctionen zu nehmen (§ 10)

$$\frac{\sqrt{da} \pm \sqrt{db}}{\sqrt{2z}}.$$

Wir wollen aber denselben Factor hinzufügen, den wir bei den Wurzelfunctionen der Periode 0 hinzugefügt haben (§ 9), nämlich

$$\sqrt{\frac{q}{dp}} \cdot \sqrt[4]{L((t-t_1))\, L((t-t_2)) \dots L((t-t_N))}.$$

Setzen wir

$$\frac{\sqrt{F_1}}{\sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})} \sqrt{L((t-t_1)) \dots L((t-t_N))} = F,$$

$$\frac{\sqrt{G_1}}{\sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})} \sqrt{L((t-t_1)) \dots L((t-t_N))} = G,$$

so haben wir unter Fortlassung des Factors $\frac{1}{\sqrt{2}}$ die Wurzelfunctionen

$$\sqrt{F}\,\sigma_\mu(u-\lambda) \pm \sqrt{G}\,\sigma_\mu(u+\lambda).$$

§ 14.

Wir wollen nun die Wurzelfunctionen mit Indices bezeichnen und sie den Thetafunctionen von ϱ Variabeln zuordnen.

Die Bezeichnung der Wurzelfunctionen kann in folgender Weise gewählt werden. Wurzelfunctionen, deren Quotient rational ist, bekommen

denselben Index. Sind ferner W_α, W_β, W_γ drei Wurzelfunctionen und existirt eine vierte W derart, dass

$$\frac{W_\alpha W}{W_\beta W_\gamma}$$

rational ist, so geben wir W den Index $\alpha\beta\gamma$. Existirt keine solche Wurzelfunction, so wollen wir trotzdem den Index $\alpha\beta\gamma$ einführen.

Ausserdem definiren wir für jeden Index α eine Zahl k_α, die angeben soll, wie viel linear unabhängige Wurzelfunctionen den Index α haben. Entspricht dem Index α keine Wurzelfunction, so haben wir k_α gleich Null zu setzen.

Wir sahen nun, dass immer mehrere Wurzelfunctionen in der Weise zusammengehören, dass der Quotient irgend zweier von ihnen gleich einer rationalen Function multiplicirt mit einer der Grössen $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$ wird. Wir nennen solche Functionen verwandt. Sollen zwei Functionen verwandt sein, so müssen sie zunächst derselben Periode angehören. Und ferner findet man, dass auch die Combination c der Nullstellen π_α oder die Combination m der Stellen $\pi'_\alpha, \pi''_\alpha$ für beide dieselbe sein muss. Es sind also in dem Früheren die zu einer Wurzelfunction gehörenden verwandten vollständig angegeben.

Hat nun die *eine* von zwei verwandten Functionen den Index δ und unterscheidet sich der Quotient beider von einer rationalen Function um den Factor $\sqrt{p_{\alpha\beta}}$, so werden wir der *anderen* den Index $\delta\alpha\beta$ geben. Denn dann genügen wir sicher den oben für die Bezeichnung überhaupt angegebenen Bedingungen. Uebertragen wir die Bezeichnung *verwandt* auch auf die Indices, so können wir sagen: zu jedem Index δ gehören noch 15 Verwandte $\delta\alpha\beta$ $(\alpha \gtrless \beta = 1, \ldots, 6)$. Aber nicht jedem von ihnen braucht eine Wurzelfunction zu entsprechen.

Wir betrachten die einzelnen Fälle.

I. Die zur Periode 0 gehörenden Wurzelfunctionen.

Wir bezeichnen alle wesentlichen Combinationen der Nullstellen π_α von H mit Indices. Eine habe den Index c. Sie enthalte l Stellen. Wir geben dann irgend einer der zu c gehörenden Wurzelfunctionen den Index c, den anderen die Indices $c\alpha\beta$. Die Zahlen k_c, $k_{c\alpha\beta}$ sind in diesem Falle alle einander gleich, nämlich gleich $k-1$, wo k durch die Gleichung definirt war $2k+l = \sigma+1$ (§ 8). Es wird also

$$k_c = k_{c\alpha\beta} = k-1 = \frac{\sigma-1-l}{2}.$$

Ist c eine wesentliche Combination, so ist $l < \sigma-1$. Das Resultat gilt aber im allgemeinen auch noch für $l = \sigma-1$, da zu einer Combination von $\sigma-1$ Stellen im allgemeinen keine Wurzelfunction gehört. Wir rechnen daher auch die Combinationen von $\sigma-1$ Nullstellen π_α von H zu den wesentlichen, rechnen aber Combinationen, die zusammen alle Nullstellen π_α von H enthalten, nicht als verschieden.

Da es $2^{2\sigma-4}$ wesentliche Combinationen c giebt und zu jeder 16 verwandte Indices, so bekommen wir im ganzen $16 \cdot 2^{2\sigma-4} = 4^\sigma$ zur Periode 0 gehörende Indices.

Wir berücksichtigen den Fall $l = \sigma-3$ noch besonders.

Für diesen Fall hatten wir folgende Darstellung gefunden (§ 9). Ist c eine Combination von $\sigma-3$ Nullstellen, etwa der Nullstellen $\pi_1, \ldots, \pi_{\sigma-3}$, so bilden wir

$$P((t)) = \prod_{\alpha=1}^{\sigma-3} L((t-t_\alpha))$$

und erhalten dann folgende zu dieser Combination gehörende verwandte Wurzelfunctionen:

$$\sqrt{P((t))}\ \vartheta_\mu\left(t+\frac{s}{2}\right),$$

wo μ irgend einen der 16 Thetaindices bedeutet. Wir geben dieser Function den Index $c\mu$.

Die Zahlen $k_{c\mu}$ sind hier alle gleich 1.

II. Wir behandeln nun die zur Periode 56 gehörenden Wurzelfunctionen, lassen aber den § 11,1 behandelten Ausnahmefall beiseite.

Wir denken uns alle wesentlichen Combinationen aus den π'_α und π''_α mit Indices bezeichnet. Eine habe den Index m. Zu m gehört dann eine bestimmte Function F und G (§ 13). Für die zu m gehörenden Wurzelfunctionen fanden wir die Darstellung

$$W = \sqrt{F}\,\sigma_\mu(u-\lambda) \pm \sqrt{G}\,\sigma_\mu(u+\lambda) \qquad (\mu = 1, \ldots 4).$$

Wir können diese so bezeichnen. Der Function

$$\sqrt{F}\,\sigma_\mu(u-\lambda)+\sqrt{G}\,\sigma_\mu(u+\lambda)$$

geben wir den Index $m1\mu$; dann müssen wir der Function

$$\sqrt{F}\,\sigma_\mu(u-\lambda)-\sqrt{G}\,\sigma_\mu(u+\lambda)$$

den Index $m156\mu$ geben. Von den 16 zu m verwandten Indices entsprechen hier nur achten Wurzelfunctionen. Die Zahlen $k_{m\alpha\beta}$ haben folgende Werthe:

$$k_{m1\mu} = k_{m156\mu} = 1 \qquad \mu = (1, \ldots 4).$$

Im übrigen ist $k_{m\alpha\beta} = 0$.

Da es $2^{2\sigma-4}$ wesentliche Combinationen m giebt und zu jeder 16 verwandte Indices gehören, so bekommen wir im ganzen 4^σ zur Periode 56 gehörende Indices. Dasselbe gilt von den zu den anderen Perioden $\alpha\beta$ gehörenden Indices. Rechnen wir die zur Periode 0 gehörenden Indices hinzu, so erhalten wir im ganzen $16 \cdot 4^\sigma = 4^{\sigma+2} = 4^\varrho$ Indices, wie es auch sein muss, da der Körper $K(z)$ vom Range ϱ ist.

§ 15.

Wir haben im vorigen Paragraphen 4^ϱ Indices definirt, also gerade so viele, als es ϑ-Functionen mit zweitheiliger Charakteristik von ϱ Variabeln giebt. Wir können also jedem Index eine dieser ϑ-Functionen zuordnen. Dabei können wir diese Zuordnung in folgender Weise wählen.

Wenn man für die Argumente in die ϑ-Functionen Integrale erster Gattung einsetzt, so werden die ungeraden Functionen, falls sie nicht etwa identisch verschwinden, einer der Wurzelfunctionen proportional. Wir werden die Bezeichnung so wählen, dass eine ϑ-Function mit dem Index α der Wurzelfunction mit demselben Index proportional wird. Dann entsprechen immer 16 verwandten Indices auch 16 verwandte Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$. Die im vorigen Paragraphen definirten Zahlen k_a haben dann noch eine zweite Bedeutung. Sie geben nämlich an, dass die ϑ-Function ϑ_a mit Gliedern der Dimension k_a beginnt. Da wir bestimmen können, wie oft k_a gerade und grösser als 0 und wie oft k_a ungerade und grösser als 1 ist, so können wir bestimmen, wie viel gerade Functionen mit den Argumenten verschwinden und wie viel ungerade von höherer als der ersten Ordnung.

k_a wird aber grösser als 1 nur für die zur Periode 0 gehörenden Indices. Und zwar war allgemein (§ 8):

$$k = \frac{\sigma - 1 - l}{2}.$$

Es wird also z. B.

$$k = 2 \quad \text{für} \quad l = \sigma - 5, \qquad k = 3 \quad \text{für} \quad l = \sigma - 7 \text{ u. s. f.}$$

Wesentliche Combinationen aus l Nullstellen π_a von H giebt es aber $\binom{2\sigma-2}{l}$. Es wird demnach, da für alle verwandten Indices hier die Zahlen k denselben Werth haben,

$$k = 2 \quad \text{für } 16 \cdot \binom{2\sigma-2}{\sigma-5} \text{ Indices,}$$

$$k = 3 \quad \text{für } 16 \cdot \binom{2\sigma-2}{\sigma-7} \text{ Indices u. s. f.}$$

Nun entsprechen aber 16 zur Periode Null gehörenden verwandten Indices 16 verwandte Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$. Diese beginnen demnach mit Gliedern derselben Dimension. Ihnen entsprechen aber immer vier bestimmte der Functionen $\varphi_{n\pi}$, mit denen sie im Gleichungssystem (5.) § 4 vorkommen. Aus diesem Gleichungssystem erkennt man, dass die vier Functionen φ_n mit Gliedern derselben Dimension beginnen wie die zugehörigen 16 verwandten $\vartheta_{m\pi\omega}$. Daraus folgt, dass von den allgemeinen ϑ-Functionen $\varphi_{n\pi}$ von σ Variabeln anfangen

$$\text{mit Gliedern 2. Dimension } \quad 4 \cdot \binom{2\sigma-2}{\sigma-5},$$

$$\text{mit Gliedern 3. Dimension } \quad 4 \cdot \binom{2\sigma-2}{\sigma-7} \quad \text{u. s. f.}$$

Ist also $\sigma \leqq 4$, so verschwindet keine der geraden Functionen φ gleichzeitig mit den Argumenten. Ist $\sigma = 5$, so beginnen 4 mit Gliedern der zweiten Dimension, für $\sigma = 6$ schon 40, und für $\sigma = 7$ beginnen 264 mit Gliedern der zweiten und 4 mit Gliedern der dritten Dimension; u. s. f.

Für uns kommen nur die Functionen in Betracht, die nicht von höherer als der ersten Ordnung mit den Argumenten verschwinden, da alle anderen identisch Null werden, wenn man für die Argumente Integrale erster Gattung setzt.

§ 16.

Wir betrachten nun die zur Periode ω_1 gehörenden Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$. Diesen entsprechen Wurzelfunctionen, die zu einer der Perioden $\alpha\beta$ gehören. Wir nehmen an, ω_1 sei mit 56 identisch. Nehmen wir ϑ_m als ungerade an, so sind die 8 Functionen $\vartheta_{m\omega_i}$, $\vartheta_{m\pi\omega_i}$ $(i = 0, \ldots 3)$ ungerade. Diese werden den 8 zu 56 gehörenden Wurzelfunctionen proportional, wenn für die Argumente Integrale erster Gattung gesetzt werden.

Bezeichnen wir den Werth einer Wurzelfunction für die obere Grenze der Integrale erster Gattung mit W_m, für die untere mit W'_m und überhaupt den Werth irgend einer Grösse für die untere Grenze durch Hinzufügen eines Accentes, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{m\omega_i} &= c_{m\omega_i} E W_{m\omega_i} W'_{m\omega_i} \\ \vartheta_{m\pi_2\omega_i} &= c_{m\pi_2\omega_i} E W_{m\pi_2\omega_i} W'_{m\pi_2\omega_i} \end{aligned}\right\} \quad (i=0,\dots 3),$$

wo die c numerische Constanten und E einen transcendenten Factor bedeuten.

Dann folgt unter Benutzung der vier ersten Gleichungen des Gleichungssystems (5.), § 4 und der Bestimmungen in § 5, II;

$$(10^{a}.)\text{–}(10^{d}.)\quad \left\{ 4(\pi_a)\,\varphi_{n\pi_a}\,\psi_{\omega_1\pi_a} = E \sum_{\substack{i=0 \\ (a=0,\dots 3)}}^{3} (\pi_a|\omega_i)\, c_{m\omega_i} W_{m\omega_i} W'_{m\omega_i}, \right.$$

wo (π) und $(\pi|\omega)$ die schon früher (§ 3) benutzten Vorzeichen sind. Ebenso folgt aus den zweiten vier Gleichungen des Systems (5.), § 4.

$$(10^{e}.)\text{–}(10^{h}.)\quad \left\{ 4(\pi_a)\,\varphi_{n\pi_a}\,\psi_{\omega_1\pi_2\pi_a} = E \sum_{\substack{i=0 \\ (a=0,\dots 3)}}^{3} (\pi_a|\omega_i)\, c_{m\omega_i\pi_2} W_{m\pi_2\omega_i} W'_{m\pi_2\omega_i}. \right.$$

Es handelt sich noch um die Bestimmung der Constanten c oder ihrer Verhältnisse.

Es ist zu setzen

$$W_m = \sqrt{F}\,\sigma_1(u-\lambda)+\sqrt{G}\,\sigma_1(u+\lambda),$$

und da ω_1 mit 56 identisch sein sollte,

$$W_{m\omega_1} = \sqrt{F}\,\sigma_1(u-\lambda)-\sqrt{G}\,\sigma_1(u+\lambda),$$

und ferner, wenn wir ω_2 mit 13 und π_2 mit 12 identificiren,

$$\begin{aligned} W_{m\omega_2} &= \sqrt{F}\,\sigma_3(u-\lambda)+\sqrt{G}\,\sigma_3(u+\lambda), \\ W_{m\omega_3} &= \sqrt{F}\,\sigma_3(u-\lambda)-\sqrt{G}\,\sigma_3(u+\lambda), \\ W_{m\pi_2} &= \sqrt{F}\,\sigma_2(u-\lambda)+\sqrt{G}\,\sigma_2(u+\lambda), \\ W_{m\pi_2\omega_1} &= \sqrt{F}\,\sigma_2(u-\lambda)-\sqrt{G}\,\sigma_2(u+\lambda), \\ W_{m\pi_2\omega_2} &= \sqrt{F}\,\sigma_4(u-\lambda)+\sqrt{G}\,\sigma_4(u+\lambda), \\ W_{m\pi_2\omega_3} &= \sqrt{F}\,\sigma_4(u-\lambda)-\sqrt{G}\,\sigma_4(u+\lambda). \end{aligned}$$

Betrachten wir die Gleichung $(10^{b}.)$

$$(11.)\quad \left\{ \begin{aligned} 4\delta\,\varphi_{n\pi_1}\,\psi_{\pi_1\omega_1} = E\{ & c_m W_m W'_m - c_{m\omega_1} W_{m\omega_1} W'_{m\omega_1} + c_{m\omega_2} W_{m\omega_2} W'_{m\omega_2} \\ & - c_{m\omega_3} W_{m\omega_3} W'_{m\omega_3}\}. \end{aligned} \right.$$

Lassen wir hier die Grenzen π und π' der Integrale zusammenfallen, so wird $\psi_{\pi_1\omega_1}$ für beide Zeichen von z Null, E aber nur für das eine. Also muss für das andere der Factor von E Null werden. Weiter können wir annehmen, dass für $\pi = \pi'$

$$\sqrt{F} = \sqrt{F'},$$
$$\sqrt{G} = -\sqrt{G'}$$

wird, also

$$W_m = W'_{m\omega_1}, \qquad W_{m\omega_1} = W'_m,$$
$$W_{m\omega_2} = W'_{m\omega_3}, \qquad W_{m\omega_3} = W'_{m\omega_2}.$$

Dann wird der Factor von E in der Gleichung (11.)

$$W'_m W'_{m\omega_1}(c_m - c_{m\omega_1}) + W'_{m\omega_2} W'_{m\omega_3}(c_{m\omega_2} - c_{m\omega_3}).$$

Soll das Null sein, so muss sein

$$c_m = c_{m\omega_1}, \quad c_{m\omega_2} = c_{m\omega_3}.$$

Benutzen wir dies und setzen die Werthe für die Wurzelfunctionen in (11.) ein, so bekommen wir

$$(11^a.)\quad \left\{ \begin{aligned} 4\delta\, \varphi_{n\pi_1}\, \psi_{\omega_1\pi_1} = E\{ & \sqrt{FG'}\,(c_m \sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u'+\lambda) + c_{m\omega_2}\sigma_3(u-\lambda)\sigma_3(u'+\lambda)) \\ & + \sqrt{F'G}\,(c_m \sigma_1(u+\lambda)\,\sigma_1(u'-\lambda) + c_{m\omega_2}\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u'-\lambda))\}. \end{aligned} \right.$$

Das Verhältniss $c_{m\omega_2} : c_m$ hängt von der Wahl der Functionen σ ab. Wir finden es so. Wir setzen die untere Grenze gleich e_3 und die obere gleich e_1. Dann werden die Argumente der ψ gleich der halben Periode 13, also ω_2 der Functionen $\vartheta_\mu(w_1, w_2)$. ω_2 ist aber auch gleichzeitig halbe Periode der Functionen ψ. Es geht demnach $\psi_{\pi_1\omega_1}$ über in $\psi_{\pi_1\omega_3}(0, 0)$, wird also Null, und zwar wieder für beide Werthe von z. Es muss also in der Gleichung (11ª.) wieder der Factor von E verschwinden, und zwar diesmal für beide Werthe von z; demnach müssen die beiden Theile dieses Factors einzeln verschwinden. Es wird aber

$$u = \int_{e_1}^{e_1} du = 0, \quad u' = \int_{e_1}^{e_3} du.$$

u' wird also gleich der Halbperiode, die die Function $\sigma_1(u) = \vartheta(u;\, 1, 1)$ in $\sigma_3(u) = \vartheta(u;\, 1{,}0)$ überführt, also gleich $\frac{1}{2}$. (Siehe z. B. *Weber* „Elliptische

Functionen“ § 18, 10.) Dann aber wird in Gleichung (11ª.)

$$c_m\,\sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u'+\lambda)+c_{m\omega_2}\,\sigma_3(u-\lambda)\,\sigma_3(u'+\lambda)$$
$$= -c_m\,\sigma_1\lambda\,\sigma_3\lambda - c_{m\omega_2}\,\sigma_3\lambda\,\sigma_1\lambda$$

und

$$c_m\,\sigma_1(u+\lambda)\,\sigma_1(u'-\lambda)+c_{m\omega_2}\,\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u'-\lambda)$$
$$= +c_m\,\sigma_1\lambda\,\sigma_3\lambda + c_{m\omega_2}\,\sigma_3\lambda\,\sigma_1\lambda.$$

Diese Ausdrücke werden beide Null, wenn wir

$$c_m = -c_{m\omega_2}$$

setzen.

Statt der Gleichungen (10.) haben wir jetzt, wenn wir c_m mit zu E nehmen

$$4(\pi_a)\,\varphi_{n\pi_a} = \frac{E}{\psi_{\pi_a\omega_1}((t-t'))}\sum_{i=0}^{3}(\pi_a|\omega_i)\,W_{m\omega_i}\,W'_{m\omega_i}.$$

Hier sind durch $t-t'$ die bis jetzt immer fortgelassenen Argumente

$$t^{(1)}-t^{(1)'},\ t^{(2)}-t^{(2)'}$$

angedeutet. Setzen wir für $W_m, \ldots,$ die Werthe ein, so bekommen wir folgende Formeln

(II.)
$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{E}{\psi_{\omega_1}((t-t'))}\Big\{\sqrt{FF'}\,[\sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u'-\lambda)-\sigma_3(u-\lambda)\,\sigma_3(u'-\lambda)]\\
&\qquad +\sqrt{GG'}\,[\sigma_1(u+\lambda)\,\sigma_1(u'+\lambda)-\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u'+\lambda)]\Big\},\\
\varphi_{n\pi_1} &= \frac{\pm E}{\psi_{\pi_1\omega_1}((t-t'))}\Big\{\sqrt{FG'}\,[\sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u'+\lambda)-\sigma_3(u-\lambda)\,\sigma_3(u'+\lambda)]\\
&\qquad +\sqrt{GF'}\,[\sigma_1(u+\lambda)\,\sigma_1(u'-\lambda)-\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u'-\lambda)]\Big\},\\
\varphi_{n\pi_2} &= \frac{\pm E}{\psi_{\pi_2\omega_1}((t-t'))}\Big\{\sqrt{FF'}\,[\sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u'-\lambda)+\sigma_3(u-\lambda)\,\sigma_3(u'-\lambda)]\\
&\qquad +\sqrt{GG'}\,[\sigma_1(u+\lambda)\,\sigma_1(u'+\lambda)+\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u'+\lambda)]\Big\},\\
\varphi_{n\pi_3} &= \frac{\pm E}{\psi_{\pi_3\omega_1}((t-t'))}\Big\{\sqrt{FG'}\,[\sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u'+\lambda)+\sigma_3(u-\lambda)\,\sigma_3(u'+\lambda)]\\
&\qquad +\sqrt{F'G}\,[\sigma_1(u+\lambda)\,\sigma_1(u'-\lambda)+\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u'-\lambda)]\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Hierdurch sind die zur Periode ω_1 gehörenden Functionen φ dargestellt. Für die Perioden ω_2, ω_3 wird analoges gelten, sodass wir darauf nicht eingehen.

Ferner haben wir eine Darstellung der 8 ungeraden zu ω_1 gehörenden Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ gefunden für den Fall, dass die Argumente Integrale erster Gattung sind z. B.

$$\vartheta_m = c_m E W_m W'_m.$$

Für die anderen von 0 verschiedenen Perioden $\alpha\beta$ oder $\pi_\alpha \omega_\beta$ wird ähnliches gelten. Wir können aber auch die 8 geraden zu einer dieser Perioden gehörenden Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ bestimmen, nämlich mit Hülfe der in § 6 abgeleiteten Formel (9.) und der analogen, worauf wir hier nicht weiter eingehen.

Es ist vielleicht noch folgende Bemerkung von Interesse. Wenn man die Gleichungen (10^b.) und (10^f.) dieses Paragraphen durch einander theilt, so bekommt man links

$$\frac{\psi_{\pi_1\omega_1}((t-t'))}{\psi_{\pi_3\omega_1}((t-t'))}.$$

Da dies ganz unabhängig von z ist, so muss auch die rechte Seite von z unabhängig werden. Nun kann man die Gleichungen (10^e.)–(10^h.) ähnlich umformen wie die Gleichungen (10^a.)–(10^d.). Man bekommt dann für (10^f.)

$$4\delta\varphi_{n\pi_1}\psi_{\pi_3\omega_1}((t-t')) = \alpha E\{\ \sqrt{FG'}\,[\sigma_2(u-\lambda)\,\sigma_2(u'+\lambda)+\sigma_4(u-\lambda)\,\sigma_4(u'+\lambda)]$$
$$+\sqrt{GF'}\,[\sigma_2(u+\lambda)\,\sigma_2(u'-\lambda)+\sigma_4(u+\lambda)\,\sigma_4(u'-\lambda)],$$

wo α eine Constante ist.

Benutzt man nun die Gleichung

$$\sigma_3(0)\,\sigma_3(u-u')\,\sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u'+\lambda)$$
$$= \sigma_3\lambda\,\sigma_3(u-u'-\lambda)\,\sigma_1 u\,\sigma_1 u' + \sigma_1\lambda\,\sigma_1(u-u'-\lambda)\,\sigma_3 u\,\sigma_3 u'$$

und die hieraus durch gleichzeitiges Vermehren von u und u' um die halben Perioden $\frac{1}{2}$, $\frac{1+\omega}{2}$ und $\frac{\omega}{2}$ und ferner durch Vertauschen von λ mit $-\lambda$ hervorgehenden Gleichungen, so bekommt man folgende Gleichungen statt (10^b.) und (10^f.):

$$4\delta\varphi_{n\pi_1}\psi_{\pi_1\omega_1}((t-t')) = E\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_1 u' - \sigma_3 u\,\sigma_3 u'}{\sigma_3(0)\,\sigma_3(u-u')}\cdot A,$$

$$4\delta\varphi_{n\pi_1}\psi_{\pi_3\omega_1}((t-t')) = \alpha E\,\frac{\sigma_2 u\,\sigma_2 u' + \sigma_4 u\,\sigma_4 u'}{\sigma_3(0)\,\sigma_3(u-u')}\cdot A,$$

wo in beiden Gleichungen

$$A = \sqrt{FG'}\,[\sigma_3\lambda\,\sigma_3(u-u'-\lambda) - \sigma_1\lambda\,\sigma_1(u-u'-\lambda)]$$
$$+\sqrt{GF'}\,[\sigma_3\lambda\,\sigma_3(u'-u-\lambda) - \sigma_1\lambda\,\sigma_1(u'-u-\lambda)].$$

Dividirt man die Gleichungen, so bekommt man

$$\frac{\psi_{\pi_1\omega_1}((t-t'))}{\psi_{\pi_3\omega_1}((t-t'))} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_1 u' - \sigma_3 u\,\sigma_3 u'}{\sigma_2 u\,\sigma_2 u' + \sigma_4 u\,\sigma_4 u'}.$$

Es wird also auch die rechte Seite, wie es sein muss, von z ganz unabhängig. Bedenkt man noch, dass $\sigma_\alpha u$ und $\sigma_\alpha u'$ proportional zu $\sqrt{p-e_\alpha}$ und $\sqrt{p'-e_\alpha}$ sind für $\alpha = 1,\ldots,4$ und dass die Grössen $\sqrt{p-e_\alpha}\,\sqrt{p'-e_\alpha}$ wieder vieren der ungeraden Functionen $\vartheta_\mu(w_1, w_2)$ proportional sind, wenn unter w_1, w_2 Integrale erster Gattung verstanden werden, so sieht man, dass die Darstellung von $\frac{\psi_{\pi_1\omega_1}}{\psi_{\pi_3\omega_1}}$ ganz mit den Gleichungen, die zwischen den Functionen ψ und $\vartheta(w_1, w_2)$ stattfinden (§ 6, (8.)), übereinstimmen, wie nicht anders zu erwarten ist.

§ 17.

Wir betrachten die Functionen der Periode 0. Hier sind alle $\vartheta_{m\omega\pi}$ gerade oder alle ungerade.

Zunächst betrachten wir den Fall, wo alle zu ϑ_m verwandten Functionen ungerade sind. Von diesen werden alle *die*, deren Anfangsglieder von höherer als der ersten Ordnung sind, identisch Null, wenn für die Argumente Integrale erster Gattung gesetzt werden. Die anderen werden Wurzelfunctionen proportional und zwar denen, für die die Zahlen k gleich 1 sind. Um diese zu bilden, haben wir aus dem Product

$$\prod_{\alpha=1}^{N} L((t-t_\alpha))$$

$\sigma-3$ Factoren herauszunehmen und zu einem Producte $P((t))$ zu vereinigen. Dann können wir setzen (§ 14. I)

$$W_{m\pi_\alpha\omega_\beta} = \sqrt{P((t))}\;\vartheta_{\pi_\alpha\omega_\beta}\left(\left(t+\frac{s}{2}\right)\right)$$

und ferner

$$\vartheta_{m\pi_\alpha\omega_\beta} = c_{m\pi_\alpha\omega_\beta}\,E\,W_{m\pi_\alpha\omega_\beta}\,W'_{m\pi_\alpha\omega_\beta}.$$

Hier ist $c_{m\pi_\alpha\omega_\beta}$ eine Constante und E ein transcendenter Factor, der mit dem Factor E in § 16 identisch angenommen werden kann.

Wenden wir die Gleichungen (5.) § 4 an und berücksichtigen die Bestimmungen in § 5 I, so bekommen wir

$$(12.)\qquad \pm 4\varphi_{n\pi_\alpha}\psi_{\pi_\alpha}((t-t')) = E\sqrt{P((t))}\,\sqrt{P((t'))}\,S_\alpha,$$

wo

$$S_\alpha = \sum_{i=0}^{3} (\pi_\alpha | \omega_i)\, c_{m\omega_i}\, \vartheta_{\omega_i}\left(t+\frac{s}{2}\right) \vartheta_{\omega_i}\left(t'+\frac{s}{2}\right).$$

Nun lassen sich die Functionen $\vartheta_{\omega_i}\left(t+\frac{s}{2}\right)\vartheta_{\omega_i}\left(t'+\frac{s}{2}\right)$ linear mit constanten Coefficienten ausdrücken durch die 4 Functionen

$$\psi_{\pi_\alpha}((t-t'))\,\psi_{\pi_\alpha}((t+t'+s)) \qquad (\alpha=0,\ldots,3),$$

wo, wie auch sonst, die Argumente nur angedeutet sind. Da aber S_α den Factor $\psi_{\pi_\alpha}((t-t'))$ enthalten muss, der in den Gleichungen (12.) auf der linken Seite steht, so wird

$$(13.) \qquad S_\alpha = S_{\alpha_0}\,\psi_{\pi_\alpha}((t-t'))\,\psi_{\pi_\alpha}((t+t'+s)) \qquad (\alpha=0,\ldots,3),$$

wo S_{α_0} Constanten sind. Um die Grössen S_{α_0} zu bestimmen verfahren wir so.

Die Argumente in den Functionen $\vartheta_{\omega_i}\left(t+\frac{s}{2}\right)$ und $\vartheta_{\omega_i}\left(t'+\frac{s}{2}\right)$ sind nicht willkürlich veränderlich. Aber wenn es gelingt, die Constanten zu bestimmen unter der Annahme, dass die Argumente ganz willkürlich sind, so werden die so bestimmten Constanten auch noch bei beschränkter Veränderlichkeit der Argumente richtig sein. Wir setzen also in den Gleichungen (13.) $t^{(i)} = -\frac{s^{(i)}}{2}$ $(i=1,2)$ und bekommen

$$(14.) \qquad \sum_{i=0}^{3} (\pi_\alpha | \omega_i)\, c_{m\omega_i}\, \vartheta_{\omega_i}((0))\,\vartheta_{\omega_i}\left(t'+\frac{s}{2}\right) = S_{\alpha_0}\,\psi^2_{\pi_\alpha}\left(t'+\frac{s}{2}\right).$$
$$(\alpha=0,\ldots,3).$$

Setzen wir in Gleichung ((8.) § 6) $\pi_\beta = 0$, so haben wir

$$\sum_{\beta=0}^{3} (\pi_\beta | \omega_i)\,\psi^2_{\pi_\beta}\left(t'+\frac{s}{2}\right) = \vartheta_{\omega_i}((0))\,\vartheta_{\omega_i}\left(t'+\frac{s}{2}\right),$$

woraus folgt, da

$$\sum_{i=0}^{3} (\pi_\alpha | \omega_i)\,(\pi_\beta | \omega_i) = 0, \text{ wenn } \alpha \gtrless \beta$$
$$= 4, \text{ wenn } \alpha = \beta,$$

$$\sum_{i=0}^{3} (\pi_\alpha | \omega_i)\,\vartheta_{\omega_i}((0))\,\vartheta_{\omega_i}\left(t'+\frac{s}{2}\right) = 4\psi^2_{\pi_\alpha}\left(t'+\frac{s}{2}\right).$$

Durch Vergleichen mit Gleichung (14.) ergiebt sich

$$c_{m\omega_0} = c_{m\omega_1} = c_{m\omega_2} = c_{m\omega_3} = \frac{S_{\alpha_0}}{4} \qquad (\alpha=0,\ldots 3).$$

Es wird also, wenn c eine neue Constante bedeutet,

$$\text{(Ia.)}\quad \begin{cases} \varphi_n &= c\sqrt{P((t))}\,\sqrt{P((t'))}\,\psi((t+t'+s))\cdot E, \\ \varphi_{n\pi_1} &= \pm c\sqrt{P((t))}\,\sqrt{P((t'))}\,\psi_{\pi_1}((t+t'+s))\cdot E, \\ \varphi_{n\pi_2} &= \pm c\sqrt{P((t))}\,\sqrt{P((t'))}\,\psi_{\pi_2}((t+t'+s))\cdot E, \\ \varphi_{n\pi_3} &= \pm c\sqrt{P((t))}\,\sqrt{P((t'))}\,\psi_{\pi_3}((t+t'+s))\cdot E. \end{cases}$$

Hierdurch sind die ungeraden zur Periode 0 gehörenden φ bestimmt. Besonders einfach bekommt man noch

$$\frac{\varphi_{n\pi_\alpha}}{\varphi_{n\pi_\beta}} = \pm\frac{\psi_{\pi_\alpha}}{\psi_{\pi_\beta}}((t+t'+s)).$$

Es möge noch folgendes bemerkt werden: Da $\sqrt{P((t))}$ $\sigma-3$ Factoren der Form $\sqrt{L((t-t_\alpha))}$ enthält, jeder von diesen für unendliche Werthe von p von der Ordnung $\frac{1}{4}$ Null wird, und zwar für beide Werthe von q, so wird $\sqrt{P((t))}$ im Unendlichen für beide Werthe von q von der Ordnung $\frac{\sigma-3}{4}$ Null; da nun die φ an diesen Stellen nicht Null werden, so muss E von der Ordnung $\frac{\sigma-3}{4}$ im Unendlichen unendlich werden. Diese Eigenschaft von E werden wir noch verwenden. Im übrigen wird E nirgends unendlich und nur Null, wenn die obere Grenze mit der unteren Grenze zusammenfällt.

§ 18.

Wir betrachten nun den Fall, wo alle zu ϑ_m verwandten Functionen gerade sind. Diese Functionen gehören zu einer Combination c von $\sigma-1$ Nullstellen π von H. Wir setzen

$$P((t)) = \prod_{\alpha=1}^{\sigma-1} L((t-t_\alpha)),$$

ferner

$$r_1^{(i)} + r_2^{(i)} + \sum_{\alpha=1}^{\sigma-1} t_\alpha^{(i)} = s^{(i)} \qquad (i=1,2),$$

$$\begin{aligned} P((t)) &= L((t-t_2))\,L((t-t_3))\,P_1((t)) \\ &= L((t-t_3))\,L((t-t_1))\,P_2((t)) \\ &= L((t-t_1))\,L((t-t_2))\,P_3((t)). \end{aligned}$$

Hieraus können wir dann die Wurzelfunctionen bilden:

$$W_1 = \sqrt{P_1((t))}\ \vartheta\left(t + \frac{s - t_2 - t_3}{2}\right),$$

$$W_2 = \sqrt{P_2((t))}\ \vartheta\left(t + \frac{s - t_1 - t_3}{2}\right),$$

$$W_3 = \sqrt{P_3((t))}\ \vartheta\left(t + \frac{s - t_2 - t_1}{2}\right).$$

Sind aber $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ drei ungerade ϑ-Functionen, die diesen Wurzelfunctionen entsprechen, so giebt es eine vierte gerade Function ϑ_m so, dass

$$\frac{\vartheta_m \vartheta_3}{\vartheta_1 \vartheta_2}$$

gleich einer *Abel*schen Function wird. Wenn wir ϑ_m als Function der oberen Grenze betrachten, so können wir demnach setzen

$$\vartheta_m = E \frac{W_1 W_2}{W_3} R(p, q, z).$$

Aber es ist

$$\frac{W_1 W_2}{W_3} = \sqrt{P((t))}\ \frac{\vartheta\left(t + \frac{s - t_2 - t_3}{2}\right) \vartheta\left(t + \frac{s - t_3 - t_1}{2}\right)}{\vartheta\left(t + \frac{s - t_1 - t_2}{2}\right) L((t - t_3))}$$

und da

$$\frac{\vartheta\left(t + \frac{s - t_2 - t_3}{2}\right) \vartheta\left(t + \frac{s - t_3 - t_1}{2}\right) L((t - t'))}{\vartheta\left(t + \frac{s - t_1 - t_2}{2}\right) \vartheta\left(t - t' + \frac{s}{2}\right) L((t - t_3))}$$

eine rationale Function in $K(z)$ ist, die wir mit R zu $\overline{R}$ vereinigen können:

$$\vartheta_m = E \sqrt{P((t))}\ \frac{\vartheta\left(t - t' + \frac{s}{2}\right)}{L((t - t'))}\ \overline{R}(p, q, z).$$

Die verwandten Functionen bekommen wir, wenn wir ϑ durch ϑ_μ ersetzen, wo μ irgend einer der 16 Indices ist. Wir setzen

$$\vartheta_{m\mu} = \sqrt{P((t))}\ \frac{\vartheta_\mu\left(t - t' + \frac{s}{2}\right)}{L((t - t'))}\ R_\mu(p, q, z) \cdot E.$$

Nun führen wir die zu $P((t))$ conjugirte Function ein

$$P_1((t)) = \prod_{\alpha=\sigma}^{N} L((t - t_\alpha)).$$

Dann ist

$$z^2 = \frac{P((t))\,P_1((t))\,L^2((t-r_1))\,L^2((t-r_2))}{L((t))^{2\sigma+2}},$$

$$z\sqrt{P((t))} = \frac{P((t))\sqrt{P_1((t))}}{L((t))^{\sigma+1}}\,L((t-r_1))\,L((t-r_2))$$

$$= \frac{P((t))\,L((t-r_1))\,L((t-r_2))}{L^{\sigma+1}((t))} \cdot \frac{\vartheta_\mu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)}{\vartheta_\mu\left(t-t'-\frac{s}{2}\right)}$$

$$\times \frac{\vartheta_\mu\left(t-t'-\frac{s}{2}\right)}{\vartheta_\mu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)}\sqrt{P_1((t))}.$$

Der erste Theil ist aber eine rationale Function h von p und q. Setzen wir jetzt

$$R_\mu(p, q, z) = f(p, q) + g(p, q)\cdot z,$$

so bekommen wir, wenn wir h mit g zu F vereinigen

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_{m\mu}\,L((t-t'))}{E} \\ \qquad = \sqrt{P((t))}\;\vartheta_\mu\left(t-t'+\dfrac{s}{2}\right)\cdot f + \sqrt{P_1((t))}\;\vartheta_\mu\left(t-t'-\dfrac{s}{2}\right)\cdot F. \end{cases}$$

Es handelt sich noch um die Bestimmung von f und F. Die linke Seite der letzten Gleichung wird überhaupt nicht unendlich. E wird zwar für $\pi = \pi'$ Null, aber für $\pi = \pi'$ wird auch $L((t-t'))$ Null. Daher darf auch die rechte Seite nicht unendlich werden, und da $\sqrt{P((t))}$ und $\sqrt{P_1((t))}$ irrational sind, keiner von beiden Summanden der rechten Seite. f kann demnach nur unendlich werden für die Nullstellen von $\sqrt{P((t))}\,\vartheta_\mu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)$. Nun wird $\sqrt{P((t))}$ im Unendlichen von der Ordnung $\frac{\sigma-1}{4}$ Null, da jeder Factor $\sqrt{L((t-t_a))}$ dort von der Ordnung $\frac{1}{4}$ Null wird. Aber die linke Seite der Gleichung (15.) wird von derselben Ordnung Null, da E von der Ordnung $\frac{\sigma-3}{4}$ unendlich wird (§ 17) und $L((t-t'))$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ Null. Ebenso wird im Unendlichen $\sqrt{P_1((t))}$ von derselben Ordnung Null. Daraus folgt aber, dass f nicht dort unendlich werden kann. Würde f an einer anderen Nullstelle von $\sqrt{P((t))}$ unendlich, so würde $\sqrt{P((t))}\cdot f$ immer noch unend-

lich. Weiter kann f nicht an den Nullstellen von $\vartheta_\mu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)$ unendlich werden. Denn rationale Functionen, die nur an diesen Stellen unendlich werden, giebt es nicht. Daher ist f constant. Und ebenso folgt das gleiche für F.

Lassen wir in der Gleichung (15.) die obere Grenze π mit der unteren π' zusammenfallen, so wird die linke Seite für $z = -z'$ Null, da hierfür $L((t-t'))$ aber nicht E Null wird. Die rechte Seite verschwindet also auch. Nun sei für $t = t'$

$$\sqrt{P((t))} = \sqrt{P((t'))},$$

und damit $z = -z'$ wird,

$$\sqrt{P_1((t))} = -\sqrt{P_1((t'))},$$

dann wird

$$\sqrt{P((t'))}\,\vartheta_\mu\left(\frac{s}{2}\right) f - \varepsilon_\mu \sqrt{P_1((t'))}\,\vartheta_\mu\left(\frac{s}{2}\right)\cdot F = 0,$$

wo ε_μ den Charakter von ϑ_μ bezeichnet. Daraus finden wir das Verhältniss von f und F, und wenn c_μ einen von der oberen und unteren Grenze unabhängigen Factor bezeichnet, wird

$$\frac{\vartheta_{m_\mu} L((t-t'))}{c_\mu E}$$
$$= \sqrt{P((t))}\,\sqrt{P_1((t'))}\,\vartheta_\mu\left(\frac{s}{2}+t-t'\right)+\sqrt{P((t'))}\,\sqrt{P_1((t))}\,\vartheta_\mu\left(\frac{s}{2}-t+t'\right).$$

Damit sind auch die geraden Functionen $\vartheta_{m\pi\omega}$ dargestellt, soweit sie nicht identisch verschwinden. Und wir können jetzt auch die geraden Functionen $\varphi_{n\pi}$ der Periode 0 bestimmen. Setzen wir

$$\frac{\sqrt{P((t))}\,\sqrt{P_1((t'))}}{L((t-t'))}\,E = R,$$

$$\frac{\sqrt{P((t'))}\,\sqrt{P_1((t))}}{L((t-t'))}\,E = R_1,$$

so folgt aus dem Gleichungssystem (5.), § 4

$$(16.)\quad \left\{ \pm 4\varphi_{n\pi_\alpha}\,\psi_{\pi_\alpha}((t-t')) = R g_\alpha\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)+R_1 g_\alpha\left(t'-t+\frac{s}{2}\right), \right.$$
$$(\alpha = 0, \ldots 3)$$

wo

$$g_\alpha((t)) = g_\alpha(t^{(1)}, t^{(2)}) = \sum_{i=0}^{3} (\pi_\alpha|\omega_i)\, c_{\omega_i}\, \vartheta_{\omega_i}((t)).$$

Es lassen sich aber die Functionen $g_\alpha\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)$ als Functionen von t und t' linear ausdrücken durch die vier Functionen

$$\psi_{\pi_\alpha}((t-t'))\,\psi_{\pi_\alpha}((t-t'+s)) \qquad (\alpha=0,\ldots 3).$$

Nun muss die rechte Seite z. B. der ersten der Gleichungen (16.) durch $\psi_{\pi_\alpha}((t-t'))$ theilbar sein, und zwar für beide Werthe von z, also beide Summanden einzeln; und da R und R_1 nicht dadurch theilbar sein können, so müssen $g_\alpha\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)$ und $g_\alpha\left(t'-t+\frac{s}{2}\right)$ es sein. Es wird demnach

$$g_\alpha\left(t-t'+\frac{s}{2}\right) = c_\alpha\,\psi_{\pi_\alpha}((t-t'))\,\psi_{\pi_\alpha}((t-t'+s)),$$

$$g_\alpha\left(t'-t+\frac{s}{2}\right) = c_\alpha\,\psi_{\pi_\alpha}((t-t'))\,\psi_{\pi_\alpha}((t'-t+s)).$$

Zur Bestimmung der Constanten c_α nehmen wir wieder willkürliche Veränderlichkeit der Argumente an und setzen

$$t^{(i)\prime} = \frac{s^{(i)}}{2} \qquad (i=1,2).$$

Dann bekommen wir

$$g_\alpha((t)) = \sum_{i=0}^{3}(\pi_\alpha|\omega_i)\,c_{\omega_i}\,\vartheta_{\omega_i}((t)) = c_\alpha\,\psi_{\pi_\alpha}\left(t-\frac{s}{2}\right)\psi_{\pi_\alpha}\left(t+\frac{s}{2}\right).$$

Es bestehen aber die Gleichungen*)

$$\sum_{i=0}^{3}(\pi_\alpha|\omega_i)\,\vartheta_{\omega_i}\left(\frac{s}{2}\right)\vartheta_{\omega_i}((t)) = 4\,\psi_{\pi_\alpha}\left(t-\frac{s}{2}\right)\psi_{\pi_\alpha}\left(t+\frac{s}{2}\right),$$

danach wird

$$c_{\omega_i}\,\vartheta_{\omega_0}\left(\frac{s}{2}\right) = c_{\omega_0}\,\vartheta_{\omega_i}\left(\frac{s}{2}\right) \qquad (i=0,\ldots,3)$$

und

$$c_\alpha\,\vartheta_{\omega_0}\left(\frac{s}{2}\right) = 4\,c_{\omega_0} \qquad (\alpha=0,\ldots,3).$$

Hiernach bekommen wir, wenn C eine neue Constante ist,

$$\text{I b.}\quad \begin{cases} \varphi_n = C\{R\,\psi((t-t'+s))+R_1\,\psi((t'-t+s))\},\\ \varphi_{n\pi_1} = \pm C\{R\,\psi_{\pi_1}((t-t'+s))+R_1\,\psi_{\pi_1}((t'-t+s))\},\\ \varphi_{n\pi_2} = \pm C\{R\,\psi_{\pi_2}((t-t'+s))+R_1\,\psi_{\pi_2}((t'-t+s))\},\\ \varphi_{n\pi_3} = \pm C\{R\,\psi_{\pi_3}((t-t'+s))+R_1\,\psi_{\pi_3}((t'-t+s))\}. \end{cases}$$

---

*) Siehe z. B. *Krause*, Transformation der hyperellipt. Functionen, (Leipzig 1886) § 10, 2.

§ 19.

Damit ist unsere Aufgabe erledigt. Fassen wir die Resultate noch einmal zusammen.

Dabei wollen wir aber von constanten Factoren und dem transcendenten Factor E absehen.

Die Gesamtheit der Functionen φ zerfiel in zwei Hauptgruppen, jenachdem die 4 Functionen $\varphi_n, \varphi_{n\pi_1}, \varphi_{n\pi_2}, \varphi_{n\pi_3}$ denselben Charakter hatten, oder zwei von ihnen gerade und zwei ungerade waren. Jede der beiden Hauptgruppen enthält gerade und ungerade Functionen und zerfällt somit wieder in zwei Theile.

I. Je 4 Functionen $\varphi_n, \varphi_{n\pi_1}, \varphi_{n\pi_2}, \varphi_{n\pi_3}$ haben denselben Charakter.

a. Die ungeraden Functionen φ.

Wir haben aus dem Producte

$$S((t)) = \prod_{a=1}^{2\sigma-2} L((t-t_a))$$

$\sigma-3$ Factoren zu einem Producte $P((t))$ zu vereinigen. Bezeichnen wir dann die Summe der in $P((t))$ enthaltenen Werthe $t_a^{(i)}$ mit

$$s^{(i)} - r_1^{(i)} - r_2^{(i)} \qquad (i = 1, 2),$$

wo $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}$ die in § 9 definirten Grössen sind, so haben wir zu bilden

Ia. $$\sqrt{P((t))}\ \sqrt{P((t'))}\ \psi_{\pi_a}((t+t'+s)) \qquad (a = 0, \ldots, 3).$$

Diesen Ausdrücken entsprechen dann vier ungerade Functionen $\varphi_{n\pi_a}$.

b. Die geraden Functionen φ.

Wir haben das Product $S((t))$ in zwei Factoren $P((t))$ und $P_1((t))$ von je $\sigma-1$ Factoren zu zerlegen, sodass also

$$P((t))\ P_1((t)) = S((t)).$$

Bezeichnen wir dann wieder die Summe der in $P((t))$ enthaltenen Werthe $t_a^{(i)}$ mit $s^{(i)} - r_1^{(i)} - r_2^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, so haben wir zu bilden

Ib. $$\frac{\sqrt{P((t))\,P_1((t'))}\ \psi_{\pi_a}((t-t'+s)) + \sqrt{P((t'))\,P_1((t))}\ \psi_{\pi_a}((t'-t+s))}{L((t-t'))} \qquad (a = 0, \ldots, 3).$$

Diesen Ausdrücken entsprechen dann vier gerade Functionen $\varphi_{n\pi_a}$.

II. Zwei der Functionen $\varphi_n, \varphi_{n\pi_1}, \varphi_{n\pi_2}, \varphi_{n\pi_3}$ sind gerade, zwei ungerade. Da sind drei Fälle zu unterscheiden, jenachdem welche der Functionen mit φ_n

gleichartig ist. Wir betrachten nur einen Fall; für die anderen Fälle gilt analoges.

Wir haben eine der Perioden $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ herauszugreifen, etwa $\omega_1 = 56$. Dann stellen wir die vier zu dem elliptischen Körper $K(p, \sqrt{p_{1234}})$ gehörenden ϑ-Functionen auf

$$\sigma_1 = \vartheta(u; 11),\ \sigma_2 = \vartheta(u; 00),\ \sigma_3 = \vartheta(u; 10),\ \sigma_4 = \vartheta(u; 01)$$

und bilden die Primfactoren

$$m_a = \left\{ \frac{\sigma_1(u-\mu_a)}{\sqrt{\sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})}} \cdot \frac{L((t-t_a))}{\sqrt{p_5\,p_6^{(a)}} - \sqrt{p_6\,p_5^{(a)}}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$n_a = \left\{ \frac{\sigma_1(u+\mu_a)}{\sqrt{\sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})}} \cdot \frac{L((t-t_a))}{\sqrt{p_5\,p_6^{(a)}} + \sqrt{p_6\,p_5^{(a)}}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Ueber die Bedeutung der hier vorkommenden Grössen sehe man § 13).

Dann definiren wir einen geschlossenen Weg γ im Körper $K(p, \sqrt{p_{56}})$, der die Punkte e_5 und e_6 einmal umschliesst, aber keine der Nullstellen π_a von $z^2 = H$, und setzen für ihn eine positive Richtung fest. Wir bezeichnen dann *die* der beiden Functionen m_a und n_a, die den Factor $e^{+\frac{\pi i}{2}}$ annimmt, wenn p den Weg γ einmal in positivem Sinne durchläuft, mit h'_a, die andere, die dann den Factor $e^{-\frac{\pi i}{2}}$ annimmt, mit h''_a. Die beiden Functionen h'_a, h''_a werden jede an einer der beiden Stellen π'_a, π''_a, die in $K(p, q, \sqrt{p_{56}}) = K_{56}$ der Stelle π_a entsprechen, von der ersten Ordnung Null und ausserdem noch im Unendlichen von der Ordnung $\frac{1}{4}$, werden aber nirgends unendlich.

Wir haben jetzt zwei Producte von je $N = 2\sigma - 2$ Factoren zu bilden, indem wir immer von je zwei Grössen h'_a, h''_a die eine in das eine und die andere in das andere Product als Factor aufnehmen. Wir bezeichnen diese Producte mit

$$\sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})\,F \text{ und } \sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})\,G.$$

Dabei muss jedoch die Anzahl der Factoren h' in jedem der Producte mit $\sigma - 1$ congruent nach dem Modul 2 sein. Setzen wir noch

$$-\Sigma\mu_a = 4\lambda$$

und ferner

$$\sigma_1(u+\lambda)\,\sigma_1(u'+\lambda) + (-1)^{\varepsilon}\,\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u'+\lambda) = r_\varepsilon(u, u', \lambda) \qquad (\varepsilon = 1, 2)$$

und bilden die Ausdrücke

$$\text{II a.} \quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{FF'}\, r_1(u, u', -\lambda) + \sqrt{GG'}\, r_1(u, u', \lambda)}{\psi_{\omega_1}((t-t'))}, \\ \dfrac{\sqrt{FF'}\, r_2(u, u', -\lambda) + \sqrt{GG'}\, r_2(u, u', \lambda)}{\psi_{\omega_1\pi_2}((t-t'))}; \end{cases}$$

$$\text{II b.} \quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{FG'}\, r_2(-u, u', \lambda) + \sqrt{F'G}\, r_2(-u, u', -\lambda)}{\psi_{\omega_1\pi_1}((t-t'))}, \\ \dfrac{\sqrt{FG'}\, r_1(-u, u', \lambda) + \sqrt{F'G}\, r_1(-u, u', -\lambda)}{\psi_{\omega_1\pi_3}((t-t'))}, \end{cases}$$

wobei die mit Accenten versehenen Grössen sich auf die untere Grenze der Integrale beziehen, so entsprechen den beiden ersten dieser Ausdrücke ungerade, den beiden letzten gerade Functionen φ.

Für die zu den Perioden ω_2 und ω_3 gehörenden Functionen gelten analoge Darstellungen.

Zum Schlusse sei mir gestattet, Herrn Prof. *Schottky* auch an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und für seinen Rath bei ihr meinen Dank auszusprechen.

Zur Theorie der algebraischen Functionen mit Bezugnahme auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Kronecker hat in der Abhandlung „Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln“ im 91. Bande dieses Journals bei Untersuchungen über die ganzen algebraischen Functionen gezeigt, dass zu jeder irreductibelen ganzen algebraischen Function auch eine irreductibele ebenso verzweigte ganze algebraische Function existirt, deren Discriminante neben dem „wesentlichen Theiler“ als „ausserwesentlichen Theiler“ das Quadrat eines Polynoms enthält, dessen Linearfactoren unter einander und von denen des wesentlichen Theilers verschieden sind (l. c. S. 326). In der vorliegenden Abhandlung handelt es sich darum, eine solche *Kronecker*sche algebraische Function thatsächlich herzustellen und rational durch diese und die unabhängige Variable die ursprünglich vorgelegte algebraische Function auszudrücken. Auf diese Aufgabe stösst man in der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten (s. die Abhandlung des Verfassers Bd. 123 dieses Journals S. 75). Um auf eine einfache Weise zur Darstellung einer genannten *Kronecker*schen Function zu gelangen, kann man zum Ausgangspunkte das in den *Weierstrass*schen Vorlesungen (s. den Bericht von *Brill* und *Noether* über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen im 3. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung S. 376) vorkommende Verfahren nehmen, rational aus der vorgelegten

algebraischen Function und der unabhängigen Variablen Ausdrücke zu bilden, die in den Entwicklungen bei einem Punkte eine Anzahl beliebig gewählter Anfangsglieder haben. Zu solchen in geeigneter Weise bestimmten Ausdrücken wird ein anderer ganzer rationaler Ausdruck der ursprünglichen algebraischen Function und der unabhängigen Variablen addirt, über dessen Constanten zu dem vorliegenden Zwecke zu verfügen ist.

Vorausgesetzt werden die Reihenentwicklungen der gegebenen algebraischen Function an den Stellen, an denen die Discriminante verschwindet. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen giebt hierfür ein directes Verfahren; s. die Abhandlungen des Verfassers in diesem Journal Bd. 104, No. 7; Bd. 108, 112, und den Rückblick auf den Inhalt dieser Abhandlungen Bd. 122, S. 21, 22.

1.

Die irreductibele ganze algebraische Function sei z, die unabhängige Variable x, die Gleichung in Bezug auf z n-ten Grades.

Bei dem Punkte $x = a$ sei ein ν_1-blättriger, ein ν_2-blättriger etc. Windungspunkt vorhanden, $\nu_1, \nu_2 \ldots \geqq 1$. Die Entwicklung von z bei einem ν-blättrigen Windungspunkte hat die Form

$$z = \sum_0^\infty c_\alpha \left((x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^\alpha. \tag{1.}$$

Es werde

$$e^{\frac{2\pi}{\nu}} = \omega \tag{2.}$$

gesetzt. Die ν in dem ν-blättrigen Windungspunkte zusammenhängenden Zweige haben die Entwicklungen

$$z^{(\lambda)} = \sum_0^\infty c_\alpha \left(\omega^{\lambda-1}(x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^\alpha \qquad (\lambda = 1, \ldots, \nu). \tag{3.}$$

Nach dem in den Vorlesungen von *Weierstrass* vorkommenden Verfahren wird nun folgender Ausdruck gebildet.

Die n Zweige der Function z seien z_1 bis z_n. Das Gleichungspolynom von z mit ganzen rationalen Functionen von x als Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Potenz gleich 1 sei $\varphi(z, x)$ oder $\varphi(z)$,

also, wenn diese Coefficienten durch A bezeichnet werden,

$$(4.) \qquad z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n = \varphi(z).$$

Es werde

$$(5.) \qquad \frac{d\varphi}{dz} = \varphi'(z)$$

gesetzt. Dann wird der Ausdruck aufgestellt

$$(6.) \qquad \varphi(z)\left\{\frac{u_1}{(z-z_1)\varphi'(z_1)} + \frac{u_2}{(z-z_2)\varphi'(z_2)} + \cdots + \frac{u_n}{(z-z_n)\varphi'(z_n)}\right\},$$

worin die Grössen u in folgender Weise angesetzt werden. Bei $x = a$ und einem ν-blättrigen Windungspunkte ($\nu \geqq 1$) werden ν Summanden aus (6.) herausgenommen, z. B.

$$(7.) \qquad \varphi(z)\left\{\frac{u_1}{(z-z_1)\varphi'(z_1)} + \frac{u_2}{(z-z_2)\varphi'(z_2)} + \cdots + \frac{u_\nu}{(z-z_\nu)\varphi'(z_\nu)}\right\},$$

wo z_1, z_2 bis z_ν die ν in diesem Punkte zusammenhängenden Zweige sind, deren Entwicklungen die Form (3.) haben.

$$(8.) \qquad \omega^{\lambda-1} \quad (\lambda = 1, \ldots, \nu), \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{\nu}}$$

sei bezüglich durch

$$(9.) \qquad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$$

bezeichnet. Dann erhält u_λ $(\lambda = 1, \ldots, \nu)$ in (7.) folgenden Ausdruck

$$(10.) \quad u_\lambda = k_1\left(\omega_\lambda (x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^{-1} + k_2\left(\omega_\lambda (x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^{-2} + \cdots + k_\mu\left(\omega_\lambda (x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^{-\mu},$$

wo die k Constanten, k_μ von Null verschieden. In dem Ausdruck (6.) werden bei $x = a$ und jedem ν-blättrigen Windungspunkte ($\nu \geqq 1$) in (10.) die Zahl μ und die Constanten k für sich gewählt. Nun ist der durch Einsetzen von u_λ (10.) hergestellte Ausdruck (7.) weiter zu behandeln. Dieser ist symmetrisch in Bezug auf $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$. Ebenso ist in dem Polynom von z (7.) vom Grade $n-1$ der Coefficient jeder Potenz von z symmetrisch in Bezug auf ω_1 bis ω_ν. In einem solchen Coefficienten ist der Nenner

$$(11.) \qquad \varphi'(z_1)\varphi'(z_2)\ldots\varphi'(z_\nu)$$

symmetrisch in Bezug auf ω_1 bis ω_ν und wird durch Ausmultipliciren der

Potenzreihen eine Potenzreihe in Bezug auf $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ mit positiven ganzzahligen Exponenten, bei welcher der Coefficient g_m von $(x-a)^{\frac{m}{\nu}}$ eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten von ganzen rationalen symmetrischen Ausdrücken der $\omega_\lambda\,(\lambda = 1, \ldots, \nu)$ ist, und in jedem dieser Ausdrücke alle Glieder von der m-ten Dimension und dem Coefficienten 1 sind.

Der Zähler in dem Coefficienten von $z^\mu\,(\mu = n-1, \ldots, 0)$ in (7.) ist daher ebenfalls symmetrisch in Bezug auf die $\omega_\lambda\,(\lambda = 1, \ldots, \nu)$ und wird durch Ausmultipliciren und Zusammenfassen der Potenzreihen eine Potenzreihe in Bezug auf $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ mit ganzzahligen Exponenten, darunter negativen $\geqq -\mu$. In dieser Potenzreihe ist der Coefficient h_m von $(x-a)^{\frac{m}{\nu}}$ eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten von ganzen rationalen Ausdrücken der $\omega_\lambda, \omega_\lambda^{-1}\,(\lambda = 1, \ldots, \nu)$, und in diesen Ausdrücken ist in jedem Gliede die Summe der positiven und negativen Exponenten gleich m und der Coefficient 1. Ein solcher Ausdruck wird mit

$$(12.) \qquad (\omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_\nu)^{\nu\mu} = 1$$

multiplicirt und wird nun gleich einem ganzen rationalen symmetrischen Ausdruck der $\omega_\lambda\,(\lambda = 1, \ldots, \nu)$, in welchem alle Glieder den Coefficienten 1 und die Dimension $m+\nu\mu$ haben. Die Gleichung ν-ten Grades mit beliebig gelassenen Wurzeln ω_1 bis ω_ν sei

$$(13.) \qquad z^\nu + p_1\,z^{\nu-1} + \cdots + p_\nu = 0.$$

Eine ganze rationale symmetrische Function dieser ω_1 bis ω_ν, in welcher jedes Glied den Coefficienten 1 und die Dimension N hat, giebt als ganze rationale Function der Grössen p_1 bis p_ν dargestellt, einen Ausdruck, in welchem in jedem Gliede die Summe der Zeiger der p gleich N ist (Gewicht der symmetrischen Function). Ist nun N nicht ein ganzzahliges Vielfaches von ν, so muss in jedem Gliede eine der Grössen p_1 bis $p_{\nu-1}$ vorkommen. Hier ist die Gleichung (13.)

$$(14.) \qquad z^\nu - 1 = 0.$$

Es verschwinden die Coefficienten p_1 bis $p_{\nu-1}$. Daher verschwinden in der Entwicklung von (11.) und in der Entwicklung des Zählers von (7.) die Coefficienten derjenigen Potenzen $(x-a)^{\frac{m}{\nu}}$, in denen m nicht ein ganzzahliges Vielfaches von ν ist.

Also ergiebt sich für das Polynom (7.) $(n-1)$-ten Grades in z, dass der Coefficient jeder Potenz von z unter der Form eines Bruches erscheint, dessen Nenner (11.) eine nicht verschwindende Potenzreihe in Bezug auf $x-a$ mit positiven ganzzahligen Exponenten ist, und dessen Zähler eine Potenzreihe in Bezug auf $x-a$ mit ganzzahligen Exponenten ist, worunter negative in endlicher Anzahl sich befinden. Durch Summation erfolgt dasselbe für den Coefficienten jeder Potenz von z in dem Polynom (6.) $(n-1)$-ten Grades in z.

Dieses Ergebniss, dessen algebraische Begründung im Vorhergehenden angegeben ist, erhält man unmittelbar durch functionentheoretische Betrachtung vermittelst des Umganges von x um den Punkt a in den Ausdrücken (7.) und (11.).

Der Ausdruck (6.) nimmt demnach die Form an

$$(15.)\quad \frac{F(x,z)}{(x-a)^q}+\mathfrak{P}_0(x-a)+z\,\mathfrak{P}_1(x-a)+\cdots+z^{n-1}\,\mathfrak{P}_{n-1}(x-a),$$

wo die ganze Zahl $q \geqq 1$ ist, $F(x,z)$ eine ganze rationale Function von z höchstens $(n-1)$-ten Grades, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind, die nicht alle den Theiler $x-a$ enthalten und von niedrigerem Grade als dem q-ten sind, die $\mathfrak{P}$ Potenzreihen in Bezug auf $x-a$ mit positiven ganzzahligen Exponenten.

Der Summand

$$(16.)\quad \frac{F(x,z)}{(x-a)^q}$$

aus (15.) liefert dann, wenn in dem Ausdrucke (6.) für z die Entwicklung eines der Zweige z_1 bis z_n von der Form (3.) gesetzt wird, die Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ mit negativen Exponenten. Diese Entwicklung von (16.) beginnt demnach mit dem bezüglichen Ausdrucke u (10.), hierauf folgen Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ mit positiven Exponenten.

Die Stellen, an denen die Discriminante von z verschwindet, seien

$$(17.)\quad a_\varrho \qquad (\varrho = 1,\ldots,\varkappa).$$

Bei dem Punkte a_ϱ sei der Theil (16.) aus dem bezüglichen Ausdruck (15.) durch

$$(18.)\quad f_\varrho(x,z)$$

bezeichnet. Nun wird der Ausdruck

$$(19.)\quad \{f_1(x,z)+f_2(x,z)+\cdots+f_\varkappa(x,z)\}\,(x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2}\ldots(x-a_\varkappa)^{s_\varkappa}$$

angesetzt, wo die s_1 bis $s_\varkappa$ ganze Zahlen grösser als Null sind. Die Entwicklung von (19.) bei dem Punkte $a_\varrho = a$ und dem ν-blättrigen Windungspunkte, auf den sich die Ausdrücke (7.) und (10.) beziehen, hat für $z = z_\lambda$ die Anfangsglieder mit den Potenzen

$$(20.)\quad \left(\omega_\lambda (x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^{-\mu+\nu s_\varrho},\ \left(\omega_\lambda (x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^{-\mu+1+\nu s_\varrho},\ \ldots,\ \left(\omega_\lambda (x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^{-1+\nu s_\varrho},$$

und diese gehen aus dem Ausdrucke

$$(21.)\qquad u_\lambda (x-a_1)^{s_1}\ldots(x-a_\varrho)^{s_\varrho}\ldots(x-a_\varkappa)^{s_\varkappa}$$

hervor. Damit in (20.) nur positive Exponenten vorkommen, muss, da die Constante k_μ in (10.) von Null verschieden ist, $-\mu+\nu s_\varrho \geqq 0$ sein.

Es wird nun hier $\mu = \nu$ ***und*** $s_1 = s_2 = \cdots s_\varkappa = 1$ ***gesetzt.***

Dann beginnt die Entwicklung von (19.) bei dem Punkte $a_\varrho = a$ und dem ν-blättrigen Windungspunkte, auf den sich die Ausdrücke (7.) und (10.) beziehen, für $z = z_\lambda$ mit

$$(22.)\quad \begin{cases} c\left\{k_\mu + k_{\mu-1}\,\omega_\lambda (x-a)^{\frac{1}{\nu}} + \cdots + k_1 \left(\omega_\lambda (x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu-1}\right\},\ (\mu = \nu), \\ c = (a_\varrho - a_1)\ldots(a_\varrho - a_{\varrho-1})(a_\varrho - a_{\varrho+1})\ldots(a_\varrho - a_\varkappa). \end{cases}$$

Bei dem Punkte a_ϱ sei ein ν_1-blättriger, ein ν_2-blättriger etc. Windungspunkt, wo $\nu_1, \nu_2, \ldots \geqq 1$ ist.

In dem Ausdrucke (10.) ***bei*** $a_\varrho = a$ ***wird die Constante*** k_μ ***von einem Windungspunkte zum anderen verschieden und bei einem mehrblättrigen Windungspunkte die Constante*** $k_{\mu-1}$ ***von Null verschieden angesetzt.***

Die n Zweige der rational aus z und x zusammengesetzten Function (19.) sind nun unter einander verschieden. Diese Function ist jetzt eine irreductibele wie z verzweigte ganze algebraische Function. Dieselbe sei durch y bezeichnet, ihre n Zweige durch y_1 bis y_n. Die Discriminante von y ist abgesehen vom Vorzeichen, das Quadrat des Productes aller Differenzen $y_\alpha - y_\beta$. Aus (19.) geht bei den gemachten Bestimmungen hervor, dass die Discriminante von y bei dem Punkte $a_\varrho = a$ (17.), wo ε ein- oder mehrblättrige Windungspunkte von z vorhanden sein sollen, — ein ν_1-, ein ν_2-, bis

ν_ε-blättriger Windungspunkt — als Theiler, der die Potenz von $x-a$ mit dem höchsten Exponenten ist, den Theiler

$$(23.) \qquad \begin{cases} (x-a)^\sigma, \\ \sigma = \nu_1 - 1 + \nu_2 - 1 + \cdots + \nu_\varepsilon - 1, \end{cases}$$

enthält; die Summanden ν_1-1, ν_2-1 etc. in (23.) sind also nur bei einem mehrblättrigen Windungspunkt von Null verschieden. Bei dem Punkte a_ϱ sei $\sigma = \sigma_\varrho$. Die Discriminante von y zerfällt also in das Product zweier Factoren, von denen der eine Factor

$$(24.) \qquad (x-a_1)^{\sigma_1}(x-a_2)^{\sigma_2}\ldots(x-a_\varkappa)^{\sigma_\varkappa} = \Delta$$

ist, der andere Factor nicht für $x = a_1, a_2$ bis $a_\varkappa$ verschwindet.

Bei jeder anderen irreductibelen wie z verzweigten ganzen algebraischen Function muss, wie sich auf dieselbe Weise ergiebt, die Discriminante bei dem Punkte $a_\varrho = a$ wenigstens den Theiler (23.) enthalten, daher auch jedenfalls den Theiler (24.) Δ. Also ist die Function (24.) Δ gemeinschaftlicher Theiler der Discriminanten aller dieser algebraischen Functionen. Dieselbe ist zugleich der grösste gemeinschaftliche Theiler, da die Discriminante von z nur an den Stellen a_1 bis $a_\varkappa$ verschwindet und die Discriminante von y das Product von Δ und einem zweiten Factor ist, der für a_1 bis $a_\varkappa$ nicht verschwindet.

Dieser grösste gemeinschaftliche Theiler Δ (24.) ist der „wesentliche Theiler“ der Discriminanten der irreductibelen wie z verzweigten ganzen algebraischen Functionen. Der andere Theiler einer solchen Discriminante heisst „der ausserwesentliche Theiler“ derselben nach der Terminologie von *Kronecker*, Bd. 91 dieses Journals. Die vorstehende Herleitung ist nach *Weierstrass* gegeben (s. *Brill* und *Noether* Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen im 3. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung S. 376).

Für die Herstellung des Ausdruckes (16.) ist Folgendes zu bemerken. In dem Ausdruck (6.) ist der gemeinsame Nenner die Discriminante von z; in dieser möge der Factor $x-a$ mit dem Exponenten k vorkommen. Dann folgt aus dem Vorhergehenden ((10.); $\mu = \nu$), dass der Exponent q in (15.) höchstens $k+1$ ist. Daher sind zur Herstellung von (16.) in den Reihenentwicklungen der Zweige z bei a (3.) die Glieder bis zur Potenz $(x-a)^k$ erforderlich.

Für die Constanten k_μ bis k_1 in (10.) werden rationale Zahlen genommen, dann wird der Ausdruck (19.) den obigen Bestimmungen gemäss fixirt. Derselbe wird jetzt durch

(25.) $$H(x, z)$$

bezeichnet.

2.

Zu dem in *N*1 (25.) bestimmten Ausdrucke $H(x, z)$ wird addirt der Ausdruck

(1.) $$(C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \cdots + C_n)\ (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\varkappa),$$

wo die C willkürliche Constanten sind, a_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$ die Punkte *N*1 (17.), in denen die Discriminante von z verschwindet. Der Ausdruck (1.) sei durch

(2.) $$K(x, z, C_1, \ldots, C_n)$$

bezeichnet, und die Summe

(3). $$H(x, z) + K(x, z, C_1, \ldots, C_n) = L(x, z, C_1, \ldots, C_n)$$

gesetzt.

Bei dem Punkte a_ϱ *N*1 (17.) seien in z ein ν_1-blättriger, ein ν_2-blättriger etc. Windungspunkt vorhanden, wo $\nu_1, \nu_2 \ldots \geqq 1$ ist. Die Function L (3.) hat bei $a_\varrho = a$ und einem ν-blättrigen Windungspunkte die Entwicklung

(4.) $$\gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_\alpha \left((x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)^\alpha.$$

Bei $a_\varrho = a$ ist in dieser Entwicklung das constante Glied γ_0 von einem Windungspunkte zum anderen ein anderes, bei jedem mehrblättrigen Windungspunkte ist γ_1 von Null verschieden; die genannten Constanten γ_0 und γ_1 sind unabhängig von den willkürlichen Coefficienten C_1 bis C_n.

Die n Zweige von L sind unter einander verschieden, also ist L eine irreductibele wie z verzweigte ganze algebraische Function von x. Diese Zweige seien durch L_1 bis L_n bezeichnet, wo

(5.) $$L_\varrho = L(x, z_\varrho, C_1, \ldots, C_n) \qquad (\varrho = 1, \ldots, n)$$

ist, z_1 bis z_n die n Zweige von z. Das Gleichungspolynom

(6.) $$(L-L_1)(L-L_2)\ldots(L-L_n) = F(L, x)$$

wird vermittelst der symmetrischen Functionen von z_1 bis z_n unter Hinzuziehung der Gleichung $\varphi(z, x) = 0$ ($N1$ (4.)) als ganze rationale Function von L n-ten Grades hergestellt mit dem Coefficienten von L^n gleich 1 und

den übrigen Coefficienten als ganzen rationalen Ausdrücken der C_1 bis C_n und rationalen Functionen von x. Ein solcher Coefficient muss, da die Function L für beliebige Werthe der C eine ganze algebraische Function ist, für jedes System von Werthen C eine ganze rationale Function von x sein. In diesen Coefficienten lassen sich daher die von x abhängenden Nenner wegheben, weil man sonst über die C so verfügen könnte, dass für endliche Werthe von x der Coefficient unendlich würde. Also sind in dem Gleichungspolynome $F(L, x)$ (6.) die Coefficienten der Potenzen von L ganze rationale Functionen der C_1 bis C_n und von x.

Die Discriminante D von $F(L, x) = 0$ ist, wenn $\frac{\partial F}{\partial L} = F'$ gesetzt wird,

$$(7.) \qquad D = F'(L_1, x)\, F'(L_2, x) \ldots F'(L_n, x).$$

Wird dieselbe vermittelst der symmetrischen Functionen von L_1 bis L_n unter Hinzuziehung der Gleichung $F(L, x) = 0$ gebildet, so ergiebt sich D als ganze rationale Function von x und den C_1 bis C_n.

Aus den bei (4.) angegebenen Eigenschaften von L folgt für die Discriminante D, da dieselbe abgesehen vom Vorzeichen das Quadrat aller Differenzen $L_\alpha - L_\beta$ ist, dass D bei dem Punkte $a_\varrho = a$ genau den Theiler $N1$ (23.)

$$(8.) \qquad (x-a)^{\nu_1-1+\nu_2-1+\cdots+\nu_\varepsilon-1}$$

enthält bei beliebigen Werthen der C_1 bis C_n. In D sei der Gesammtcoefficient eines Gliedes $C_1^\alpha\, C_2^\beta \ldots C_n^\nu$ durch $p_{\alpha\beta\ldots\nu}$ bezeichnet. $p_{\alpha\beta\ldots\nu}$ verschwindet für $x = a$; wird der Linearfactor $x-a$ aus $p_{\alpha\beta\ldots\nu}$ abgesondert, so verschwindet der übrige Factor wieder für $x-a$ etc. $p_{\alpha\beta\ldots\nu}$ enthält den Theiler (8.). Also enthält $p_{\alpha\beta\ldots\nu}$ den Theiler $N1$ (24.) Δ. D stellt sich unter der Form dar

$$(9.) \qquad D = \Delta P,$$

wo P ein ganzer rationaler Ausdruck von x und den C_1 bis C_n ist, welcher bei beliebigen Werthen C_1 bis C_n für einen der Punkte a_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, \varkappa$) nicht verschwindet. Nach $N1$ ist Δ der wesentliche, P der ausserwesentliche Theiler der Discriminante D.

P enthält x, aber keinen von den C unabhängigen Linearfactor. Denn sonst müsste an einer Stelle $x = b$, welche von a_1 bis $a_\varkappa$ verschieden ist, die Gleichung $F(L, x) = 0$ (6.) eine mehrfache Wurzel besitzen bei beliebigen Werthen der C_1 bis C_n. Nun kann man aber in (3.) die n Werthe von L bei $x = b$ und den dort vorkommenden Werthen von z_1 bis z_n beliebig

wählen, dann sind die Constanten C_1 bis C_n aus dem linearen System bestimmt, da die Determinante desselben nicht verschwindet, weil die Werthe von z_1 bis z_n in $x = b$ unter einander verschieden sind.

3.

Die n Zweige der irreductibelen wie z verzweigten ganzen algebraischen Function $L(x, z, C_1, \ldots, C_n)$ *N*2 (3.) sind die Ausdrücke L_1 bis L_n *N*2 (5.). Das Product aller Differenzen $L_\alpha - L_\beta$, $\alpha > \beta$, sei durch

(1.) $$\delta(L_1, L_2, \ldots, L_n)$$

bezeichnet. Die Discriminante von L *N*2 (7.) erhält die Darstellung

(2.) $$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \delta^2(L_1, L_2, \ldots, L_n).$$

Der Ausdruck $\delta(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ ist eine ganze rationale Function der C_1 bis C_n und der Zweige von z_1 bis z_n mit rationalen Functionen von x als Coefficienten, derselbe ist alternirend in Bezug auf z_1 bis z_n. Der Gesammtcoefficient von $C_1^\alpha C_2^\beta \ldots C_n^\nu$ in δ sei durch $q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ bezeichnet. Dann ist auch $q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ ein alternirender ganzer rationaler Ausdruck von z_1 bis z_n mit rationalen Functionen von x als Coefficienten. $q^2_{\alpha\beta\ldots\nu}$ ist also symmetrisch in Bezug auf z_1 bis z_n und wird demnach eine rationale Function von x.

$q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ wird in folgender Weise durch Grössen δ für bestimmte Werthesysteme der C_1 bis C_n als lineare und homogene Verbindung der δ mit constanten Coefficienten dargestellt. Der Ausdruck $\delta(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ sei nach Potenzen von C_1 angeordnet unter der Form

(3.) $$\delta = C_1^\nu A_0 + C_1^{\nu+1} A_1 + \cdots + C_1^{\nu+\sigma-1} A_{\sigma-1}.$$

Dann werden σ von einander und von Null verschiedene Werthe C_1 angenommen, in (3.) eingesetzt und es wird das Gleichungssystem nach A_0 bis $A_{\sigma-1}$ aufgelöst. Nun wird jede Grösse A_0 bis $A_{\sigma-1}$ in derselben Weise in Bezug auf C_2 behandelt u. s. w., bis $q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ ausgedrückt ist.

Die Zweige L_1 bis L_n bleiben für endliche Werthe x endlich, ebenso also δ. Daher bleibt auch $q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ endlich und $q^2_{\alpha\beta\ldots\nu}$ ist demnach eine ganze rationale Function von x.

Aus dem Ausdrucke der Discriminante D, *N*2 (9.), $D = \Delta P$ ergiebt sich weiter Folgendes.

Geht x in einen Werth a über, für den Δ verschwindet, so verschwindet D und daher δ (2.), demnach auch $q_{\alpha\beta\ldots\nu}$; die ganze rationale

Function $q^2_{\alpha\beta\ldots\nu}$ enthält den Linearfactor $x-a$. Tritt in dem Ausdrucke von $q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ als einer linearen und homogenen Verbindung von Grössen δ mit constanten Coefficienten $\frac{\delta}{\sqrt{x-a}}$ an Stelle von δ, so wird $\frac{q_{\alpha\beta\ldots\nu}}{\sqrt{x-a}}$ dargestellt. $\Delta = (x-a)\,\Delta'$; $D = (x-a)\,D'$. Geht x wieder in einen Werth a über, für den Δ' verschwindet, so verschwindet D' und daher $\frac{\delta}{\sqrt{x-a}}$ und $\frac{q_{\alpha\beta\ldots\nu}}{\sqrt{x-a}}$; die ganze rationale Function $\frac{q^2_{\alpha\beta\ldots\nu}}{x-a}$ enthält den Linearfactor $x-a'$ u. s. w. Hieraus ergiebt sich also, dass $q^2_{\alpha\beta\ldots\nu}$ den Theiler Δ hat.

Es wird

$$q_{\alpha\beta\ldots\nu} = \sqrt{\Delta}\, r_{\alpha\beta\ldots\nu} \tag{4.}$$

gesetzt, wo $r^2_{\alpha\beta\ldots\nu}$ eine ganze rationale Function von x ist. Tritt in dem Ausdrucke von $q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ als einer linearen und homogenen Verbindung von Grössen δ mit constanten Coefficienten $\frac{\delta}{\sqrt{\Delta}}$ an Stelle von δ, so wird $r_{\alpha\beta\ldots\nu}$ dargestellt. Aus dieser Darstellung geht hervor, dass eine Verzweigungsstelle von $r_{\alpha\beta\ldots\nu}$ nur an einer Stelle auftreten könnte, wo die Discriminante von z verschwindet. Es ist aber

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\frac{\delta^2}{\Delta} = P, \tag{5.}$$

wo P aus $N2$ (9.) hervorgeht. Die ganze rationale Function P verschwindet nicht an den Stellen, wo die Discriminante von z verschwindet. Demnach muss $\frac{\delta}{\sqrt{\Delta}}$ um einen solchen Punkt herum einwerthig bleiben. Somit besteht für $r_{\alpha\beta\ldots\nu}$ nirgends eine Verzweigungstelle, und $r_{\alpha\beta\ldots\nu}$ ist eine ganze rationale Function von x.

Es hat sich also nunmehr für die Discriminante D der Ausdruck ergeben

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\Delta\, Q^2, \tag{6.}$$

wo Q eine ganze rationale Function der C_1 bis C_n und von x ist, welche bei einem beliebigen Werthesystem der C_1 bis C_n für keinen der Punkte verschwindet, für den die Discriminante von z verschwindet, und welche keinen von den C_1 bis C_n unabhängigen Linearfactor von x enthält.

Um Q herzustellen, wird in folgender Weise verfahren. Nachdem D aus $N2$ (7.) hergestellt ist, wird der höchste dort vorkommende Grad

von x bekannt. Derselbe sei N, der Grad von Δ sei η, dann ist der höchste Grad von x in Q gleich $\frac{N-\eta}{2}$. Dieses ist also der höchste Grad, der in $r_{\alpha\beta\ldots\nu}$ vorkommen kann. Es ist

$$r_{\alpha\beta\ldots\nu} = \frac{q_{\alpha\beta\ldots\nu}}{\sqrt{\Delta}}. \tag{7.}$$

$q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ war in dem Ausdruck von δ der Gesammtcoefficient von $C_1^{\alpha} C_2^{\beta} \ldots C_n^{\nu}$. Nun werden bei einem Punkte b, der nicht zu denen gehört, in welchen die Discriminante von z verschwindet, die Entwicklungen nach Potenzen von $x-b$ mit positiven ganzzahligen Exponenten in diesem Ausdrucke für $q_{\alpha\beta\ldots\nu}$ und in $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ vorgenommen, wobei $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ in allen Coefficienten $r_{\alpha\beta\ldots\nu}$ übereinstimmend ist. $r_{\alpha\beta\ldots\nu}$ ist ein Polynom in Bezug auf $x-b$ höchstens vom Grade $\frac{N-\eta}{2}$. Bis zu diesem Grade ist die Grösse rechts in (7.) zu entwickeln.

Wenn auf diese Weise Q hergestellt ist, so muss die Gleichung (6.) bestehen, womit eine Probe auf die Richtigkeit der Rechnung gegeben ist.

4.

Die in dem Ausdrucke der Discriminante D $N3$ (6.) auftretende Function Q, eine ganze rationale Function von x und den C_1 bis C_n, hat mit $\frac{dQ}{dx}$, welches durch Q' bezeichnet werde, keinen Theiler gemeinsam, solange die C_1 bis C_n unbestimmt bleiben. Der Beweis erfolgt nach dem Verfahren von ***Kronecker*** in der Abhandlung Bd. 91 dieses Journals § 6. Hierbei kommt der durch den Schluss von $n-1$ auf n zu erweisende Hülfssatz zur Anwendung, dass eine ganze rationale Function mehrerer Variablen nur auf ***eine*** Weise in das Product unzerlegbarer Factoren dieser Art zerlegbar ist (abgesehen von constanten Factoren).

Auf Q und Q' als Functionen von x betrachtet sei das Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers angewandt bis zu dem Reste Null. Dann ist zu zeigen, dass der vorletzte Rest das x nicht enthält. Die C können hierauf so gewählt werden, dass weder einer der eingehenden Nenner noch der vorletzte Rest verschwindet. Q und Q' haben dann keinen gemeinsamen Theiler und Q ist ein Product von unter einander verschiedenen Linearfactoren.

Wenn bei dem Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers von Q und Q' der vorletzte Rest das x enthielte (oder der erste Rest verschwände), so würden Q und Q' einen gemeinsamen Theiler in x haben, der sich als ganze rationale Function von x mit rationalen Ausdrücken der C als Coefficienten darstellt. Dann würden unter Anwendung des vorhin genannten Hülfssatzes Q und Q' als Producte von je zwei Factoren hervorgehen, die ganze rationale Functionen von x und den C_1 bis C_n sind, von denen ein Factor Q und Q' gemeinsam ist und x thatsächlich enthält. Nun müsste auch eine derartige Darstellung bestehen, worin ein gemeinsamer Factor, der x enthält, unzerlegbar wäre, derselbe sei durch U bezeichnet und in dieser Darstellung $Q = UV$. U enthält neben x Grössen C thatsächlich, da ein von den C freier Linearfactor von Q nicht besteht ($N2$).

Es ergiebt sich

$$(1.) \qquad Q = UV,\ Q' = U'V + UV',$$

wo $U' = \frac{dU}{dx}$, $V' = \frac{dV}{dx}$, und hieraus würde folgen, dass $U'V$ den Theiler U, demnach auch V denselben Theiler enthielte. Also wird

$$(2.) \qquad Q = U^2 W,$$

wo U und W ganze rationale Functionen von x und den C_1 bis C_n.

Gemäss $N3$ ist

$$(3.) \qquad Q = \frac{\delta(L_1, L_2, \ldots, L_n)}{\sqrt{\Delta}}.$$

In einem Punkte $x = b$, in dem die Discriminante von z nicht verschwindet, seien die n von einander verschiedenen Werthe z ζ_1 bis ζ_n. Es wird, wenn $\varphi(z) = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_n)$ ist, der Ausdruck aufgestellt

$$(4.) \qquad \varphi(z)\left\{\frac{G_1}{(z-\zeta_1)\varphi'(\zeta_1)} + \frac{G_2}{(z-\zeta_2)\varphi'(\zeta_2)} + \cdots + \frac{G_n}{(z-\zeta_n)\varphi'(\zeta_n)}\right\}.$$

Alsdann seien die Grössen C_1 bis C_n aus dem Ausdrucke in $N2$ (1.)

$$(5.) \qquad C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \cdots + C_n$$

durch die Coefficienten der entsprechenden Potenzen von z in dem Ausdrucke (4.) ersetzt. Die n Zweige der Function $L(x, z, C_1, \ldots, C_n)$ $N2$ (3.) sind die Grössen $L(x, z_\varrho, C_1, \ldots, C_n) = L_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, n)$ $N2$ (5.). Bei dem

Punkte $x = b$ ist die Differenz $L_\alpha - L_\beta$ gleich $(b-a_1)(b-a_2)\dots(b-a_\varkappa)$ multiplicirt mit der Entwicklung

$$(6.)\quad \begin{cases} H(b,\zeta_\alpha) - H(b,\zeta_\beta) + G_\alpha - G_\beta \\ \qquad + (x-b)\{S^{(0)}_{\alpha\beta} + G_1 S^{(1)}_{\alpha\beta} + \dots + G_n S^{(n)}_{\alpha\beta}\}, \end{cases}$$

wo $S^{(r)}_{\alpha\beta}$ $(r = 0, \dots, n)$ eine Potenzreihe nach Potenzen von $x-b$ mit positiven ganzzahligen Exponenten, welche die G nicht enthält. Die Grössen G seien so gewählt, dass die Ausdrücke

$$(7.)\qquad H(b,\zeta_\alpha) - H(b,\zeta_\beta) + G_\alpha - G_\beta \qquad (\alpha,\beta = 1,\dots,n;\ \alpha > \beta)$$

unter einander verschieden sind. Dann werden G_1 bis G_n in der Nähe dieser Werthe variabel genommen. x wird in der Nähe von b fixirt, so dass der Werth von (6.) in der Nähe von (7.) liegt. Jetzt ist gemäss (3.) Q abgesehen von einem constanten Factor gleich dem Product der $\frac{n(n-1)}{2}$ Ausdrücke (6.) für $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, $(\alpha > \beta)$, welche von den Variablen G als lineare Functionen derselben abhängen, und welche unter einander verschieden sind.

In dem Ausdrucke (2.) für $Q = U^2 W$ werden die C durch die bezüglichen Ausdrücke aus (4.) ersetzt. Dann muss U neben x Grössen G thatsächlich enthalten, weil man durch

$$(8.)\qquad G_r = C_1 \zeta^{n-1} + C_2 \zeta_r^{n-2} + \dots + C_n$$

aus (4.) wieder auf (5.) zurückgeht und U Grössen C enthält. Wird nun U nach Potenzen von $x-b$ entwickelt, so ergiebt sich aus U, dadurch dass x in der Nähe von b fixirt wird, eine ganze rationale Function von Variablen G. Da aber Q abgesehen von einem constanten Factor bereits durch das Product der $\frac{n(n-1)}{2}$ Factoren (6.), welche die G linear enthalten und unter einander verschieden sind, dargestellt ist, so kann U quadratisch in Q nicht vorkommen.

Es hat sich also ergeben, dass man über die C so verfügen kann, dass Q und $\frac{dQ}{dx}$ keinen Theiler gemeinsam haben, dass demnach die Discriminante von Q nicht verschwindet. Die Gleichung $Q = 0$ hat dann einfache Wurzeln. C_1 kann hierbei von Null verschieden angesetzt werden, was wegen des Folgenden bestimmt wird; für die C werden rationale Zahlen genommen.

5.

Nachdem in der algebraischen Function $L(x, z, C_1, \ldots, C_n)$ $N2$ (3.) die C gemäss den Angaben von $N4$ gewählt sind, so dass C_1 von Null verschieden ist und die ganze rationale Function Q von x $N3$ (6.) unter einander verschiedene Linearfactoren enthält, wird jetzt das Verhalten der Function L bei $x = \infty$ behandelt.

In der Gleichung für z $\varphi(z, x) = 0$ $N1$ (4.) mit ganzen rationalen Functionen von x als Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Potenz gleich 1 wird $x = \frac{1}{t}$ gesetzt. Nun sei l die niedrigste positive ganze Zahl, so dass, wenn die Gleichung mit t^{ln} multiplicirt und $t^l z = u$ gesetzt wird, die Coefficienten ganze rationale Functionen von t werden. Diese Gleichung in u möge für $t = 0$ Wurzeln haben, die unter einander und von Null verschieden sind, U_1 bis U_n. Dann haben die n Zweige von z bei $x = \infty$ Entwicklungen nach absteigenden Potenzen von x mit ganzzahligen Exponenten, welche bezüglich mit $U_1 x^l$, $U_2 x^l$ bis $U_n x^l$ beginnen.

In diesem Falle haben die n Zweige von L bei $x = \infty$ Entwicklungen nach absteigenden Potenzen von x mit ganzzahligen Exponenten, welche bezüglich mit

$$(1.) \qquad C_1 (U_1 x^l)^{n-1} x^\varkappa,\ C_1 (U_2 x^l)^{n-1} x^\varkappa, \ldots, C_1 (U_n x^l)^{n-1} x^\varkappa$$

beginnen. Die Anfangscoefficienten $C_1 U_1^{n-1}$ bis $C_1 U_n^{n-1}$ sind unter einander und von Null verschieden, wenn dieses mit U_1^{n-1} bis U_n^{n-1} der Fall ist.

Hat die Function z bei $x = \infty$ nicht diese Eigenschaft, so kann man durch eine lineare Substitution für x

$$(2.) \qquad x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$$

auf den vorigen Fall zurückkommen. Dem Punkte $\xi = \infty$ soll ein solcher Punkt x entsprechen, so dass, wenn z dort die Werthe ζ_1 bis ζ_n hat, die Grössen $\zeta_1^{n-1}, \zeta_2^{n-1}$ bis ζ_n^{n-1} unter einander und von Null verschieden sind. Die von ξ abhängende Function z wird in dem Punkte, der $x = \infty$ entspricht, $\xi = -\frac{\delta}{\gamma}$, unendlich. Die Function

$$(3.) \qquad z\left(\xi + \frac{\delta}{\gamma}\right)^l = v$$

bleibt für endliche ξ endlich und die Entwicklungen der Zweige von v bei $\xi = \infty$ nach absteigenden Potenzen von ξ beginnen bezüglich mit

$$\zeta_1 \xi^l, \zeta_2 \xi^l \text{ bis } \zeta_n \xi^l.$$

Man kann daher ξ statt x einführen und statt z die irreductibele ganze algebraische Function v verwenden und mit dieser den L bei z entsprechenden Ausdruck bilden, und kommt damit auf das Vorige zurück.

Um einen Punkt x von der angegebenen Eigenschaft zu erhalten, wird die Gleichung

$$(4.) \qquad (s - z_1^{n-1})(s - z_2^{n-1}) \cdots (s - z_n^{n-1}) = 0$$

unter Hinzuziehung der Gleichung von z gebildet. Die Discriminante derselben ist nicht identisch gleich Null. Es wird ein Punkt x genommen, in dem diese Discriminante und das absolute Glied in (4.) nicht verschwindet. Für ein beliebiges x kann nicht $z_1^{n-1} = z_2^{n-1}$ sein. Bei $n = 2$ erhellt dieses unmittelbar. Bei $n > 2$ würde hieraus

$$(5.) \qquad z_2 = e^{\frac{2\pi i \varrho}{n-1}} z_1$$

folgen, wo ϱ eine der Zahlen 1, 2 bis $n-2$. $e^{\frac{2\pi i \varrho}{n-1}}$ sei durch τ bezeichnet. Aus (5.) ergiebt sich weiter $z_3 = \tau z_2 = \tau^2 z_1$ etc. bis $z_1 = \tau^\varepsilon z_1$, $\tau^\varepsilon = 1$, wo ε der Nenner in dem Bruche ist, der $\frac{\varrho}{n-1}$ in der kleinsten Benennung ausdrückt, also $\varepsilon > 1$ und Theiler von $n-1$ ist. Die Zweige $z_1, \tau z_1, \tau^2 z_1$ bis $\tau^{\varepsilon-1} z_1$ sind unter einander verschieden. Nun wird z_1 in einen von den vorigen ε Zweigen verschiedenen Zweig z_α übergeführt. Dann sind auch die Zweige $z_\alpha, \tau z_\alpha$ bis $\tau^{\varepsilon-1} z_\alpha$ vorhanden, die unter einander und von den vorigen verschieden sind. Ist $2\varepsilon < n$, so wird z_1 in einen von den vorigen 2ε Zweigen verschiedenen Zweig z_β übergeführt u. s. w. Es müssten sich also schliesslich $n = \sigma\varepsilon$ Zweige ergeben, wo $\varepsilon > 1$ und Theiler von $n-1$ ist; es können aber nicht n und $n-1$ einen Theiler > 1 haben.

6.

Es soll nun die algebraische Function z aus $N1$ rational durch x und die gleichverzweigte algebraische Function $L(x, z, C_1, \ldots, C_n)$ $N2$ (3.), worin die C, wie im Anfang von $N5$ angegeben ist, bestimmt sind, ausgedrückt werden.

Nach *N*2 (6.) ist das Gleichungspolynom

$$(1.) \qquad (L-L_1)(L-L_2)\dots(L-L_n) = F(L, x)$$

hergestellt. Es wird $\frac{dF}{dx} = F'(L, x)$ gesetzt. Für z erhält man den Ausdruck

$$(2.) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = F(L, x)\left\{\frac{z_1}{(L-L_1)F'(L_1, x)} + \frac{z_2}{(L-L_2)F'(L_2, x)} + \dots + \frac{z_n}{(L-L_n)F'(L_n, x)}\right\} \\ \qquad = \frac{h_1 L^{n-1} + h_2 L^{n-2} + \dots + h_n}{D}, \end{array} \right.$$

wo D die Discriminante *N*2 (7.) ist, die Grössen h symmetrische ganze rationale Functionen der n Zweige von z, z_1 bis z_n mit rationalen Functionen von x als Coefficienten sind, daher rationale Functionen von x. Diese Grössen h haben zugleich die Ausdrücke von ganzen rationalen Functionen der z_1 bis z_n, der L_1 bis L_n und von x. Dieselben bleiben also für endliche Werthe von x endlich und sind demnach ganze rationale Functionen von x. Um eine solche Grösse h zu bestimmen, werden in den Ausdruck derselben als einer ganzen rationalen Function von z_1 bis z_n, L_1 bis L_n und x die Entwicklungen der z_1 bis z_n, L_1 bis L_n bei $x = \infty$ nach absteigenden Potenzen von x eingesetzt und aus dieser Entwicklung die Potenzen von x mit ganzzahligen Exponenten gleich oder grösser als Null entnommen.

Falls die algebraische Function z bei $x = \infty$ die in der vorigen Nummer angegebene Beschaffenheit hat, so erhält man nach den dortigen Angaben die Entwicklungen der Zweige von z und derjenigen von L *N*2 (3.) bei $x = \infty$ nach absteigenden Potenzen von x mit ganzzahligen Exponenten. Das Entsprechende findet statt, wenn die in *N*5 (3.) genannte Function v statt z verwandt wird.

7.

Anwendung des Vorhergehenden in der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten.

Vermittelst der vorgelegten irreductibelen ganzen algebraischen Function z war die irreductibele ebenso verzweigte ganze algebraische Function $L(x, z, C_1, \dots, C_n)$ *N*2 (3.), *N*4 (Schluss) hergestellt. Es wird eine Stelle $x = a$ genommen, an welcher ein mehrblättriger Windungspunkt von L vorkommt. An dieser Stelle $x = a$ hat L bei jedem R-blättrigen Windungspunkte, wo $R \geqq 1$ ist, eine Entwicklung der Form

$$(1.) \qquad \gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_a \left((x-a)^{\frac{1}{R}}\right)^a;$$

die Constante γ_0 ist von einem dieser Windungspunkte zum anderen eine andere, und wenn $R > 1$ ist, so verschwindet γ_1 nicht. An einer Stelle, wo die Discriminante von L verschwindet, ohne dass eine Verzweigung stattfindet, haben von den n dort einwerthigen Zweigen von L zwei, L_α und L_β, denselben Werth, aber $\frac{dL_\alpha}{dx}$ ist von $\frac{dL_\beta}{dx}$ verschieden, die anderen $n-2$ Zweige haben unter einander und von $L_\alpha = L_\beta$ verschiedene Werthe.

Die Function L hat also die Eigenschaft, die am Schlusse von $N1$ der Abhandlung des Verfassers „Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten“ Bd. 123 dieses Journals S. 75 bezeichnet war (dort ist S. 72 Zeile 7 von unten vor „Der Coefficient c_1“ einzuschieben: „bei $R > 1$“).

Die Function z möge bei $x = \infty$ die in $N5$ bei (1.) angegebene Beschaffenheit haben. Dann hat die Function L bei $x = \infty$ die Eigenschaft, dass ihre n Zweige Entwicklungen nach absteigenden Potenzen von x mit ganzzahligen Exponenten haben, die mit

$$(2.) \qquad \sigma_1 x^\varrho, \sigma_2 x^\varrho, \ldots, \sigma_n x^\varrho$$

beginnen, wo die σ unter einander und von Null verschieden sind.

L erfüllt dann zugleich bei $x = \infty$ die Voraussetzung, die in $N6$ I (vgl. S. 109) der Abhandlung Bd. 123 gemacht war. Sonst möge L die Voraussetzung l. c. $N6$ II B oder C bei $x = \infty$ erfüllen.

Wenn nun ursprünglich die Function z in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkam, so ist dieselbe nach den Angaben von $N6$ rational durch x und L auszudrücken, wodurch die Function L in den Coefficienten der Differentialgleichung auftritt.

Es sei ferner mit Bezugnahme auf das Verhalten der Function z bei $x = \infty$ nach $N5$ die unabhängige Variable x durch die dort genannte lineare Substitution in ξ ausgedrückt. Diese Substitution wird in der linearen Differentialgleichung vorgenommen, alsdann an Stelle von z die in $N5$ (3.) genannte Function v eingeführt, und nun wird v rational durch ξ und diejenige algebraische Function ausgedrückt, welche bei z der Function L entspricht.

Die Integrale der von ξ abhängenden Differentialgleichung werden durch die umgekehrte lineare Substitution Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung. Die Ausdrücke letzterer Integrale bei einem Punkte erhält man aus den Ausdrücken jener Integrale bei dem correspondirenden

Punkte durch Einführung der linearen Substitution, welche ξ durch x ausdrückt, nach demselben Verfahren, welches bei Anwendung einer linearen Substitution eintritt, wenn der Uebergang eines Integrales von einem Punkte zu einem anderen auszudrücken ist (Abh. Bd. 96 *N* 20 I B, Bd. 115 *N* 3 III, *N* 7 III). Die Werthe der von x abhängenden Integrale und ihrer Ableitungen nach x mit vorgeschriebener Annäherung in einem Punkte x ergeben sich vermittelst der Werthe der von ξ abhängenden Integrale und ihrer Ableitungen nach ξ in dem x entsprechenden Punkte ξ. —

Die in dieser Abhandlung untersuchte Aufgabe aus der Theorie der algebraischen Functionen ist in anderer Weise behandelt in dem Buche von *Hensel* und *Landsberg* (1902): Theorie der algebraischen Functionen einer unabhängigen Variabeln S. 402—409.

Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Der Grundsatz der Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen ist dieser:

Wenn die Coefficienten einer homogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich Eins in einem Kreise einwerthige und stetige analytische Functionen sind, so genügt der linearen Differentialgleichung eine und nur eine innerhalb des *ganzen* Kreises einwerthige und stetige analytische Function, die mit ihren $m-1$ ersten Ableitungen im Mittelpunkte des Kreises vorgeschriebene Werthe annimmt.

Diesen Satz hat *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gegeben und *Fuchs* hat im Anschluss hieran diesen Satz mit einem von ihm gelieferten Beweise allgemein bekannt gemacht (Osterprogramm von 1865 der städtischen Gewerbeschule zu Berlin und Band 66 dieses Journals) als Grundlage für seine weiteren Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen (vergleiche hierbei das von dem Verfasser im Anfange seiner ersten Abhandlung „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“ Band 74 dieses Journals S. 193 Gesagte). ***Daher wird man diesen Grundsatz den Weierstrass-Fuchs*schen *Satz nennen können.***

Fuchs hat in seinen allgemeinen Untersuchungen über die Theorie der linearen Differentialgleichungen (Band 66 und 68 dieses Journals) in Bezug auf die homogene lineare Differentialgleichung mit dem Coefficienten

der höchsten Ableitung gleich Eins, deren Coefficienten in der Nähe eines Punktes einwerthige und abgesehen von diesem Punkte stetige analytische Functionen sind, den allgemeinen Ausdruck der linear unabhängigen Integrale gegeben, der das Verhalten der Integrale beim Umgange um diesen Punkt (singulären Punkt) charakterisirt. Dann hat derselbe besonders die Form derjenigen unter diesen Differentialgleichungen ermittelt, deren Integrale in den Potenzreihen, die in der Entwicklung auftreten, Potenzen mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl enthalten (reguläre Integrale). Von dieser Differentialgleichung ergeben sich die Integrale nach einem allgemeinen von *Fuchs* aufgestellten und bewiesenen Convergenzsatze. Ferner geht aus der Form dieser Differentialgleichung der von *Fuchs* gegebene Ausdruck der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und nur regulären Integralen hervor. Die Untersuchungen, die der Verfasser in diesem Journal Band 74 bis 126 über lineare Differentialgleichungen angestellt hat, beziehen sich besonders auf die Aufgabe, *die Integrale bei einem singulären Punkte der Differentialgleichung darzustellen, wenn dort nicht mehr alle Integrale regulär sind. Zu dem Zwecke hat derselbe die Zerlegung des homogenen linearen Differentialausdruckes und der Differentialgleichung behandelt.* Diese Zerlegung ist in der Abhandlung des Verfassers Band 75 (*N*2, *N*5) dieses Journals begonnen (vergl. Abhandlung Bd. 78 *N* 1), und ist auf algebraischem Wege in einem Gebiete von linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten und weiter auch mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten durchgeführt worden. Die zu diesem Gebiete gehörenden linearen Differentialgleichungen sind solche, dass zur Aufstellung der Integrale bei den singulären Punkten *specielle Convergenzbetrachtungen nicht erforderlich sind.* Die Integration dieser Differentialgleichungen ist unter Hinzunahme bestimmter Integrale vollzogen (s. die Einleitung zu der Uebersicht in Band 96 und den Rückblick in den Abhandlungen Band 122, Band 123 dieses Journals). Die Theorie der linearen Differentialgleichungen hat bei diesen Untersuchungen eine Anwendung gefunden auf die algebraischen Functionen (s. den Rückblick in der Abhandlung Band 122 S. 21 dieses Journals) und in der Variationsrechnung (Band 125 dieses Journals).

Bemerkungen zur Determinantentheorie.

(Von *K. Hensel.*)

§ 1.

In den Elementen der Determinantentheorie wird der Satz bewiesen, dass eine Function $\theta(u_{gh})$ der n^2 Variablen eines quadratischen Systemes von n^2 Elementen:

$$(1.) \qquad (u_{gh}) = \begin{pmatrix} u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n} \\ u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{n1}, u_{n2}, \ldots, u_{nn} \end{pmatrix}$$

gleich der Determinante $|u_{gh}|$ jenes Systemes multiplicirt mit einem von den Elementen u_{gh} unabhängigen Factor C ist, wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften hat:

I. Sie ist eine homogene lineare Function der Elemente $(u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n})$ der ersten Horizontalreihe H_1 von (u_{gh}).

II. Sie ändert nur ihr Zeichen, wenn man die Elemente $(u_{11}, \ldots, u_{1n})$ der ersten Zeile H_1 mit den entsprechenden Elementen $(u_{k1}, \ldots, u_{kn})$ irgend einer andern Zeile H_k vertauscht, d. h. sie ändert ihr Zeichen bei jeder der $n-1$ Vertauschungen

$$(H_1, H_k) \qquad (k=2,3,\ldots,n).$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass die gleichen beiden Eigenschaften der Function $\theta(u_{gh})$ dann auch in Bezug auf jede Horizontalreihe des Systems (u_{gh}) zukommen. Ersetzt man in der für θ geltenden Gleichung:

$$(2.) \qquad \theta(u_{gh}) = C \cdot |u_{gh}|$$

das System (u_{gh}) durch das sogenannte Einheitssystem:

$$E = (\delta_{gh}) \qquad (\delta_{gg}=1,\ \delta_{gh}=0 \text{ für } g \gtrless h)$$

so folgt aus ihr $C = \theta(E)$; jene Gleichung kann also auch in der Form

$$\theta(u_{gh}) = \theta(E)\cdot|u_{gh}| \tag{3.}$$

geschrieben werden.

Legt man an Stelle des quadratischen Systemes (1.) der Untersuchung eine rechteckige Matrix:

$$(u_{gh}) = \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots, & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \dots, & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1}, & u_{m2}, & \dots, & u_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.}$$

von m Horizontalreihen $H_1, H_2, \dots, H_m$ und n Verticalreihen $V_1, V_2, \dots, V_n$ zu Grunde, und untersucht diejenigen Functionen $\theta(u_{gh})$ der mn Variablen u_{gh} welche wieder die beiden folgenden Eigenschaften haben:

I. Sie sind linear und homogen in Bezug auf die Elemente von H_1

II. Sie ändern nur ihr Zeichen bei allen $(m-1)$ Vertauschungen (H_1, H_i) für $i = 2, 3, \dots, m$,

so gilt für diese ein allgemeinerer Satz, welcher im Folgenden bewiesen und dann zur Begründung einiger Fundamentaltheoreme der Determinantentheorie benutzt werden soll.

Ist nämlich zunächst $n \geqq m$, und sind

$$D_1, D_2, \dots, D_\mu$$

die $\mu = n_m$ Unterdeterminanten m-ter Ordnung, welche aus der Matrix (u_{gh}) durch Weglassung von je $n-m$ Verticalreihen gebildet werden können, so besitzt jede homogene lineare Function derselben mit constanten Coefficienten

$$C_1 D_1 + C_2 D_2 + \dots + C_\mu D_\mu$$

die beiden Eigenschaften I und II, weil dasselbe offenbar von jeder einzelnen unter jenen Determinanten D_h gilt.

Man kann aber auch leicht die Umkehrung dieses Satzes beweisen. Es seien nämlich:

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu$$

die den Systemen von $D_1, D_2, \dots, D_\mu$ entsprechenden Einheitssysteme von

mn Elementen, welche also in jeder Horizontalreihe eine Eins und sonst lauter Nullen enthalten, und es bedeute allgemein $\theta(E_i)$ den constanten Werth, den die zu untersuchende Function $\theta(u_{gh})$ annimmt, wenn man das System u_{gh} durch das betreffende Einheitssystem E_i ersetzt. Dann gilt der Satz:

Jede Function $\theta(u_{gh})$ der mn Variablen u_{gh}, welche die beiden Eigenschaften I und II besitzt, ist in der Form darstellbar:

$$\theta(u_{gh}) = \theta(E_1) D_1 + \theta(E_2) D_2 + \cdots + \theta(E_\mu) D_\mu. \tag{5.}$$

Bilden wir nämlich die Differenz:

$$\theta_0(u_{gh}) = \theta(u_{gh}) - \sum_{k=1}^{\mu} \theta(E_k) D_k,$$

so besitzt diese neue Function $\theta_0(u_{gh})$ offenbar ebenfalls die beiden Eigenschaften (I) und (II); ausserdem aber verschwindet sie identisch, sobald man von den Verticalreihen $V_1, \ldots, V_n$ irgend welche $n-m$ durch Nullen ersetzt.

In der That, lässt man z. B. nur diejenigen Verticalreihen ungeändert, welche zu einer bestimmten Unterdeterminante D_k gehören, während alle anderen Elemente gleich Null gesetzt werden und bezeichnet nun die m^2 Elemente dieses quadratischen Partialsystemes durch $\bar{u}_{gk}$ so geht $\theta(u_{gh})$ in eine Function $\theta(\bar{u}_{gk})$ jener m^2 Elemente allein über, welche in Bezug auf sie offenbar ebenfalls die beiden Eigenschaften I und II hat, und daher nach (3.) gleich $\theta(E_k) D_k$ ist. Beachtet man endlich, dass alle anderen Partialdeterminanten D_i bei dieser Substitution verschwinden, während $\theta(E_k) D_k$ ungeändert bleibt, so folgt in der That, dass $\theta_0(\bar{u}_{gk}) \equiv 0$ ist; und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Endlich zeigt man aber leicht, dass eine Function $\theta_0(u_{gh})$, welche diese drei Eigenschaften hat, identisch Null sein muss.

Nach der ersten und zweiten jener drei Eigenschaften ist nämlich θ_0 homogen und linear in den Elementen einer jeden Zeile H_i, also besteht diese Function aus lauter Producten:

$$c_{h_1, h_2, \ldots, h_m} u_{1\,h_1} u_{2\,h_2} \cdots u_{m\,h_m}.$$

Ist aber dieses Produkt eines der Glieder von $\theta_0(u_{gh})$ und setzt man alle Elemente u_{gh} ausser denen von $V_{h_1}, V_{h_2}, \ldots, V_{h_m}$ gleich Null, so verschwinden wegen der dritten Eigenschaft von θ_0 alle Glieder dieser Function, während sich das obige Produkt bei jener Substitution nicht ändert. Also muss $c_{h_1, h_2, \ldots, h_m}$ gleich Null sein; da aber dasselbe für jedes Element von $\theta_0(u_{gh})$

gilt, so ist in der That $\theta_0(u_{gh}) \equiv 0$. Damit ist also bewiesen, dass für jede Function $\theta(u_{gh})$ welche die beiden Eigenschaften I und II hat, die Identität besteht

$$\theta(u_{gh}) = \theta(E_1) D_1 + \cdots + \theta(E_\mu) D_\mu.$$

Ist speciell $m > n$, so kann man aus der Matrix (u_{gh}) keine Unterdeterminante m-ter Ordnung bilden, d. h. es ist dann $\mu = 0$, und die soeben durchgeführten Betrachtungen lehren dann, dass eine Function der mn Elemente (u_{gh}), welche die beiden Eigenschaften (I.) und (II.) hat, identisch verschwindet.

Derselbe Satz gilt natürlich auch für die Function $\theta(u_{gh})$, welche in Bezug auf die Elemente der ersten *Verticalreihe* V_1 linear und homogen ist und bei den $(n-1)$ Vertauschungen (V_1, V_i) für $i = 2, \ldots, n$ nur ihr Zeichen ändert; nur treten dann an die Stelle der n_m Unterdeterminanten m-ter Ordnung von (u_{gh}) die m_n Uuterdeterminanten n-ter Ordnung welche man aus diesem System durch Weglassung von je $(m-n)$ Horizontalreihen erhält.

Da, falls $m \gtrless n$ ist, immer eine der beiden Zahlen n_m und m_n gleich Null ist, so ergiebt sich endlich:

> Eine Function $\theta(u_{gh})$ der mn Elemente (u_{gh}), welche in Bezug auf ihre Zeilen und ihre Colonnen die beiden Eigenschaften I und II besitzt, ist stets gleich Null, es sei denn, dass $m = n$ ist; ist das Letztere der Fall, so ist die einzige Function dieser Art, die mit einer Constanten multiplicirte Determinante $|u_{gh}|$.

§ 2.

Wir benutzen diesen Satz zuerst zum Beweise der Multiplikationstheoremes für Matrizen in seiner allgemeinsten Form. Componiren wir zwei rechteckige Matrizen:

$$\underset{\substack{i=1,2,\ldots,m\\ k=1,2,\ldots,n}}{(u_{ik})}$$

und

$$\underset{\substack{k=1,2,\ldots,n\\ l=1,2,\ldots,m}}{(v_{kl})}$$

in der gewöhnlichen Weise, d. h. so, dass wir die Elemente der m Zeilen

$H_1, H_2, \ldots, H_m$ von (u_{ik}) mit den entsprechenden Elementen der m Colonnen $V'_1, V'_2, \ldots, V'_m$ von (v_{kl}) multipliciren, so erhalten wir ein System:

$$(w_{il}) = (H_i\, V'_l) = (u_{ik})\,(v_{kl}),$$

dessen Elemente durch die Gleichungen:

$$w_{il} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\, v_{kl} = H_i\, V'_l$$

bestimmt sind. Betrachten wir nun irgend eine Unterdeterminante r-ter Ordnung des componirten Systemes

$$W^{(r)}_{i,l} = \begin{vmatrix} w_{i_1 l_1}, w_{i_1 l_2}, \ldots, w_{i_1 l_r} \\ w_{i_2 l_1}, w_{i_2 l_2}, \ldots, w_{i_2 l_r} \\ \vdots \\ w_{i_r l_1}, w_{i_r l_2}, \ldots, w_{i_r l_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{i_1} V'_{l_1}, H_{i_1} V'_{l_2}, \ldots, H_{i_1} V'_{l_r} \\ H_{i_2} V'_{l_1}, H_{i_2} V'_{l_2}, \ldots, H_{i_2} V'_{l_r} \\ \vdots \\ H_{i_r} V'_{l_1}, H_{i_r} V'_{l_2}, \ldots, H_{i_r} V'_{l_r} \end{vmatrix},$$

so folgt aus der zweiten symbolischen Darstellung zunächst, dass ihr Elementensystem in derselben Weise aus den beiden Partialsystemen:

$$(u_{i_\varrho, k})_{(\varrho = 1, 2, \ldots, r)} = \begin{pmatrix} u_{i_1 1}, u_{i_1 2}, \ldots, u_{i_1 n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{i_r 1}, u_{i_r 2}, \ldots, u_{i_r n} \end{pmatrix}$$

und

$$(v_{k l_\varrho})_{(\varrho = 1, 2, \ldots, r)} = \begin{pmatrix} v_{1 l_1}, \ldots, v_{1 l_r} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n l_1}, \ldots, v_{n l_r} \end{pmatrix}$$

componirt ist. Zweitens ergiebt sich aus derselben Darstellung, dass diese Determinante homogen und linear in Bezug auf die Elemente der ersten Zeile H_{i_1} von $(u_{i_\varrho k})$ ist, und bei jeder der $(r-1)$ Vertauschungen (H_{i_1}, H_{i_ϱ}) für $\varrho = 2, \ldots, r$ nur das Zeichen ändert. Sind also:

$$D_1, D_2, \ldots, D_\mu$$

alle $\mu = n_r$ Partialdeterminanten r-ter Ordnung von $(u_{i_\varrho, k})$, und sind ferner

$$E_1, E_2, \ldots, E_\mu$$

die diesen Partialdeterminanten entsprechenden Einheitssysteme, so ergiebt sich nach dem soeben bewiesenen Fundamentalsatze für $W_{il}^{(r)}$ die Gleichung:

$$W_{il}^{(r)} = \Sigma\, W_{il}^{(r)}(E_h)\, D_h.$$

Ersetzt man aber in der Compositionsgleichung:

$$W_{il}^{(r)} = |(u_{i_\varrho k})(v_{kl_\sigma})|$$

die erste Componente $(u_{i_\varrho k})$ durch eins der μ Einheitssysteme, etwa durch das zu D_h gehörige System E_h so ergiebt sich ohne Weiteres die Gleichung:

$$W_{il}^{(r)}(E_h) = |(E_h)(v_{kl_\sigma})| = \Delta_h$$

wenn Δ_h die Partialdeterminante r-ter Ordnung ist, welche aus denjenigen Horizontalreihen von (v_{kl_ϱ}) besteht, die den Verticalreihen von $(u_{i_\varrho k})$ entsprechen.

Also ergiebt sich für jede Determinante $(W_{il}^{(r)})$ die folgende einfache Gleichung:

$$W_{il}^{(r)} = D_1\,\Delta_1 + D_2\,\Delta_2 + \cdots + D_\mu\,\Delta_\mu,$$

und diese Gleichungen gelten für alle Unterdeterminanten beliebiger Ordnung des componirten Systemes.

§ 3.

Aus dem im § 1 bewiesenen Satze leiten wir ferner als einfache Folgerung den sogen. *Laplace*schen Determinantensatz ab. Wir theilen die im ersten Abschnitt betrachtete Matrix

(1.) $$(u_{gh}) = (H_1, H_2, \ldots, H_m) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots, m \\ h = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

in zwei Theilmatrizen

$(2^{a}.)$ $$(u_{g^{(1)}, h}) = (H_{g_1}, H_{g_2}, \ldots, H_{g_r}) = \begin{pmatrix} u_{g_1 1}, u_{g_1 2}, \ldots\ldots\ldots, u_{g_1 n} \\ u_{g_2 1}, u_{g_2 2}, \ldots\ldots\ldots, u_{g_2 n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{g_r 1}, u_{g_r 2}, \ldots\ldots\ldots, u_{g_r n} \end{pmatrix}$$

und

$(2^{b}.)$ $$(u_{g^{(2)}\, h}) = (H_{g_{r+1}}, \ldots, H_{g_m}) = \begin{pmatrix} u_{g_{r+1} 1}, u_{g_{r+1} 2}, \ldots, u_{g_{r+1} n} \\ u_{g_{r+2} 1}, u_{g_{r+2} 2}, \ldots, u_{g_{r+2} n} \\ \vdots \\ u_{g_m 1}, \quad u_{g_m 1}, \quad \ldots, u_{g_m n} \end{pmatrix}$$

von r bezw. $(m-r)$ Horizontalreihen. Wir machen diese Einteilung ganz beliebig, setzen aber von vornherein fest, dass in beiden Matrizen die Horizontalreihen in natürlicher Anordnung, d. h. so hingeschrieben sein sollen, dass

$$g_1 < g_2 < \ldots < g_r$$

und

$$g_{r+1} < g_{r+2} < \ldots < g_m$$

ist.

Wir untersuchen wiederum alle Functionen $\theta(u_{gh})$, welche in Bezug auf die ganze Matrix (u_{gh}) die Eigenschaften (I.) und (II.) besitzen. Da jeder dieser Functionen dieselben Eigenschaften sowohl in Bezug auf die Elemente der ersten, als auch in Bezug auf die Elemente der zweiten Teilmatrix zukommen, so ist sie eine lineare homogene Function der Determinanten r-ter Ordnung

$$D_1, D_2, \ldots D_\mu$$

der ersten Theilmatrix $(u_{g^{(1)}h})$ in $(2^a.)$ und eine ebensolche Function der Determinanten $(m-r)$-ter Ordnung

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$$

der Matrix $(u_{g^{(2)}h})$ in $(2^b.)$.

Es besteht also für jede dieser Functionen eine Gleichung

$$\theta(u_{gh}) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\nu} C_{ik} D_i \Delta_k, \tag{3.}$$

wo nur noch die Zahlcoefficienten C_{ik} zu bestimmen sind. Um den Coefficienten C_{ik} für ein bestimmtes Indexsystem (i, k) zu finden, ersetzen wir in (3.) das Variablensystem (u_{gh}) durch das speciellere $(\bar{u}_{gh})$, in welchem alle Verticalreihen durch Nullen ersetzt sind, mit Ausnahme von denjenigen, welche entweder zu D_i oder zu Δ_k gehören, während in diesen alle Variablen ungeändert bleiben. Diese neue Matrix besteht dann ebenfalls aus m Horizontalreihen, und sie hat entweder m oder weniger als m Verticalreihen, je nachdem die zu D_i und Δ_k gehörigen Systeme lauter verschiedene Verticalreihen, oder mindestens eine Verticalreihe gemeinsam haben. In beiden Fällen besitzt aber die so sich ergebende Function $\theta(\bar{u}_{gh})$ in Bezug auf diese Matrix ebenfalls die Eigenschaften I und II.

Haben nun D_i und Δ_k mindestens eine Colonne gemeinsam, so verschwindet nach dem am Schlusse von § 1 bewiesenen Korollare $\theta(\bar{u}_{gh})$

identisch; also ist auch $C_{ik} = 0$. In der Gleichung (3.) ist daher nur über diejenigen Producte $D_i \Delta_k$ zu summiren, welche keine Verticalreihe gemeinsam habe.

Haben jetzt die zu D_i und Δ_k gehörigen Systeme keine Kolonne gemeinsam, so ist das specielle System $(\overline{u}_{gh})$ quadratisch, und nach dem auf Seite 73 angegebenen Theoreme (2.) wird $\theta(\overline{u}_{gh}) = C|\overline{u}_{gh}|$. Der Einfachheit wegen wählen wir für das System m-ter Ordnung $(\overline{u}_{gh})$ das erste, so dass

$$(\overline{u}_{gh}) = (u_{rs}) \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m)$$

ist, und dividiren mit der Constanten C durch. Dann ergiebt sich die folgende allgemeine Darstellung einer Determinante m-ter Ordnung

$$(3^a.) \qquad |u_{rs}| = \Sigma C_{ik} D_i \Delta_k,$$

wo jetzt

$$D_1, D_2, \ldots, D_\mu$$

und

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\mu$$

die $\mu = m_r$ Unterdeterminanten der r-ten und der $(m-r)$-ten Ordnung sind, welche man aus den beiden Theilmatrizen

$$(4.) \quad \begin{cases} (u_{g^{(1)},h}) = (H_{g_1}, \ldots, H_{g_r}) = \begin{pmatrix} u_{g_1 1}, u_{g_1 2}, \ldots\ldots\ldots, u_{g_1 m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{g_r 1}, u_{g_r 2}, \ldots\ldots\ldots, u_{g_r m} \end{pmatrix} \\ (u_{g^{(2)},h}) = (H_{g_{r+1}}, \ldots, H_{g_m}) = \begin{pmatrix} u_{g_{r+1} 1}, u_{g_{r+1} 2}, \ldots, u_{g_{r+1} m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{g_m 1}, \quad u_{g_m 2}, \quad \ldots, u_{g_m m} \end{pmatrix} \end{cases}$$

bilden kann.

Gehören zu der Partialdeterminante D_i die Verticalreihen $(V_{h_1}, \ldots, V_{h_r})$, so gehören zu der complementären Determinante die $(m-r)$ übrigen $(V_{h_{r+1}} \ldots V_{h_m})$, so dass die Zahlen $(h_1, \ldots, h_r; h_{r+1}, \ldots, h_m)$ eine Permutation von $(1, 2, \ldots, m)$ bilden, in welcher die r ersten und die $(m-r)$ letzten für sich wieder ihrer Grösse nach aufeinander folgen. Wir bezeichnen nun allgemein die zu $D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ complementären Determinanten bzw. durch $\Delta_\mu, \Delta_{\mu-1}, \ldots, \Delta_1$. Dann sind je zwei solche complementäre Determinanten, welche den Zeilen $(H_{g_1}, \ldots, H_{g_r})$ und $(H_{g_{r+1}}, \ldots, H_{g_m})$ und den Colonnen $(V_{h_1}, \ldots, V_{h_r})$ und $(V_{h_{r+1}}, \ldots V_{h_m})$ entsprechen, folgendermassen zu schreiben:

$$(5.)\qquad D_h = \begin{vmatrix} u_{g_1 h_1}, \cdots, u_{g_1 h_r} \\ \vdots \\ u_{g_r h_1}, \cdots, u_{g_r h_r} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{h'} = \begin{vmatrix} u_{g_{r+1} h_{r+1}}, \cdots, u_{g_{r+1} h_m} \\ \vdots \\ u_{g_m h_{r+1}}, \cdots, u_{g_m h_m} \end{vmatrix}. \qquad (h+h'=\mu+1)$$

Dann geht unsere Gleichung (3ª.) über in:

$$|u_{rs}| = \Sigma\, C_{hh'}\, D_h\, \Delta_{h'} \qquad (h+h'=\mu+1).$$

Ersetzt man endlich die zu einem bestimmten Producte $D_h \Delta_{h'}$ gehörigen Systeme in (5.) durch die zugehörigen Einheitssysteme und bezeichnet man das so sich ergebende ganze System m-ter Ordnung (u_{rs}) durch $E_{hh'}$, so ergiebt sich $C_{hh'} = |E_{hh'}|$, und man erhält die Gleichung:

$$|u_{rs}| = \sum_{i=1}^{\mu} |E_{hh'}|\, D_h\, \Delta_{h'} \qquad (h+h'=\mu+1).$$

Das System $E_{hh'}$ ist also dasjenige Einheitssystem, welches aus (u_{rs}) durch die Substitutionen

$$(6.)\qquad u_{g_1 h_1} = u_{g_2 h_2} = \cdots = u_{g_m h_m} = 1$$

hervorgeht, wenn alle übrigen Elemente gleich Null gesetzt werden.

Beachtet man, dass dieses System $E_{hh'}$, wie eine leichte Ueberlegung lehrt, durch

$$(g_1-1)+(g_2-2)+\cdots+(g_r-r)$$

Zeilenvertauschungen und durch

$$(h_1-1)+(h_2-2)+\cdots+(h_r-r)$$

Colonnenvertauschungen in das Einheitssystem E übergeht, so ergiebt sich für die gesuchten Coefficienten $|E_{hh'}|$ die einfache Gleichung

$$|E_{hh'}| = (-1)^{G+H},$$

wenn

$$G = g_1+\cdots+g_r$$

und

$$H = h_1+\cdots+h_r$$

gesetzt wird. Wir erhalten somit die folgende Darstellung der *Laplace*schen Determinantenrelation

$$|u_{r,s}| = \Sigma\,(-1)^{G+H}\, D_h\, \Delta_{h'}.$$

Ich beweise endlich noch, dass jede Function $\theta(u_{gh})$, welche die beiden Eigenschaften I und II a. S. 74 hat, eine irreductible Function ihrer mn Elemente u_{gh} ist. Zerfiele nämlich $\theta(u_{gh})$ in zwei Factoren $\theta_1(u_{gh})$ und $\theta_2(u_{gh})$ und enthielte der erste θ_1 auch nur ein Element einer Zeile H_i, so muss er alle Elemente dieser Zeile enthalten, während θ_2 dann von diesen Elementen von H_i unabhängig ist; anderenfalls wäre nämlich $\theta = \theta_1 \theta_2$ nicht homogen und linear in den Elementen von H_i.

Ist ferner das System (u_{gh}) speciell quadratisch, also $\theta(u_{gh}) = C|u_{gh}|$, so gilt das soeben für die Zeilen H_i Bewiesene auch für die Colonnen V_k. Enthielte also jetzt der erste Factor $\theta_1(u_{gh})$ der Determinante auch nur ein Element u_{ik} so enthielte er alle Elemente $(u_{i1}, \ldots, u_{in})$ von H_i und somit aus dem soeben angegebenen Grunde auch alle Elemente von $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$; also wäre gegen unsere Annahme $\theta_2(u_{gh})$ von allen in Elementen unabhängig. Die Determinante ist demnach eine irreductible Function ihrer m^2 Elemente.

Zerfiele endlich die allgemeinste Function $\theta(u_{gh})$ in (5.) a. S. 75 in zwei Factoren θ_1 und θ_2, so wäre dasselbe der Fall, wenn man die $n-m$ letzten Colonnen $V_{m+1}, \ldots, V_n$ durch Nullen ersetzt. Dann wäre aber $\theta_1 \theta_2 = \theta(E_1) \cdot D_1$ und die irreductible Determinante D_1 müsste in einem der beiden Factoren, etwa in D_1 ganz enthalten sein. Da somit aber D_1, also auch θ_1, gewisse Elemente aller Horizontalreihen $(H_1, \ldots, H_m)$ enthält, so kann nach den obigen Bemerkungen θ_2 gar kein Element u_{gh} enthalten; unsere Behauptung ist daher vollständig bewiesen.

Zur Classification der quadratischen Formen, der Curven und Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

(Von Herrn *Lothar Heffter* in Bonn.)

Das oft behandelte Thema der Classification der Curven und Flächen zweiten Grades ist wohl zuletzt von meinem Freunde *Koehler**) in Angriff genommen und insofern sehr befriedigend erledigt worden, als er bei Zugrundelegung *beliebiger* homogener Coordinaten durch geschickte, zum Theil geometrische Ueberlegungen zu Tabellen gelangt, die sofort ausser der vollständigen die projective Classification für sich und eine metrische für sich nebst ihren Kriterien erkennen lassen.

Wenn ich trotzdem denselben Gegenstand nochmals aufnehme, so sind es zwei Punkte, die mir das wünschenswerth erscheinen lassen.

Einmal möchte ich deutlich hervortreten lassen, dass nicht nur die Classification der Gebilde *II. Ordnung,* was schon Herr *Hensel***) gezeigt hat, und was auch bei Herrn *Koehler* (a. a. O.) zu erkennen ist, sondern auch die Gebilde *II. Klasse* — bis auf eine in zwei Fällen erforderliche, sehr einfach zu vollziehende Spaltung — analytisch durch die *Classification je zweier quadratischen Formen,* deren eine die projective, deren andere die weitere affine***) Classification giebt, geleistet werden kann. Die bei den Gebilden II. Klasse hierfür heranzuziehende zweite quadratische Form wird

*) Archiv der Math. u. Phys. III. Folge Bd. 3 (1902), S. 21 ff.

**) Dieses Journal Bd. 113 (1894), S. 303 ff.

***) Unter „affinen“ geometrischen Eigenschaften verstehe ich solche, die bei der Gruppe der affinen Transformationen ungeändert bleiben.

bei den Curven und Flächen in genau analoger Weise gewonnen. Während sie sich aber bei den *Curven* einfach als die zu der vorgelegten *adjungirte* Form herausstellt, hat sie bei den *Flächen* die Bedeutung, dass sie, gleich Null gesetzt, den *Tangenten-Complex* der Fläche giebt. Wenn auch diese quadratische Form schon bei *Clebsch-Lindemann**) für die Eintheilung der Flächen II. Klasse eine Rolle spielt, so dürfte doch ihre Bedeutung für dieses Problem erst durch die Form und die Herleitung der hier zu gebenden Resultate völlig zur Geltung kommen.

Für die Classification von quadratischen Formen, auf die also diejenige der Gebilde II. Grades stets zurückführbar ist, ist aber die eleganteste Kriterienreihe zweifellos eine von *Sylvester***) herrührende, die in der Theorie der Formen nur von Herrn *Netto****) wieder abgeleitet, sonst aber weder dort noch in der analytischen Geometrie benutzt worden zu sein scheint. Diese *„charakteristische Reihe“* in der analytischen Geometrie einzubürgern, ist der andere Wunsch, der diese Zeilen dictirt.

Die benutzten Coordinaten sind bei der *projectiven* Classification *beliebige* zusammengehörige homogene Punkt- und Linien-(bezw. Ebenen-) Coordinaten $x_1, x_2, x_3, (x_4)$ und $u_1, u_2, u_3, (u_4)$, während ich für die *affine* Classification allerdings die Benutzung *Hesse*scher Coordinaten als naturgemäss erachte. In diesem Falle ist also $x_3 = 0$ (bezw. $x_4 = 0$) die Gleichung der uneigentlichen Geraden (bezw. Ebene); die Einheitspunkte dürfen aber auf *jeder* der zwei (bezw. drei) Axen noch ganz beliebige sein.

Die Einordnung der hier zu entwickelnden Classification in das Gebäude der analytischen Geometrie kann an sehr früher Stelle erfolgen. Nur der Nachweis, dass eine quadratische Form und ihre adjungirte Form, gleich Null gesetzt, bei nicht verschwindender Determinante *dasselbe* Gebilde darstellen, ist als vorangehend zu betrachten.

Der Kürze wegen sei es gestattet, alles Bekannte, was des Zusammenhangs halber nicht ganz unerwähnt bleiben kann, nur anzudeuten. In dem rein algebraischen Abschnitt (I.), wo ich im wesentlichen dem *Sylvester-Netto*schen Wege folge, erlaube ich mir trotzdem theilweise eine etwas grössere Ausführlichkeit, weil mir die dort zu gebende Berechnungsart einer

---

*) Vorlesungen über Geometrie. Bd. 2, I. Leipzig, 1891, S. 197 ff.

**) Philos. Magaz. 4. Ser. Bd. 4 (1852). S. 138 ff.

***) Vorlesungen über Algebra. Bd. I. Leipzig, 1896. S. 222.

orthogonalen Substitution zur Ueberführung einer quadratischen Form in eine Quadratsumme besonders einfach und bei beliebiger Zahl von Unbestimmten noch nicht entwickelt zu sein scheint.

I.

Charakteristische Reihe einer quadratischen Form.

Die quadratische Form

$$(1.) \qquad f(xx) \equiv \sum_{i=1}^{i=n} x_i f_i(x) \equiv \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

wird durch die Substitution

$$(2.) \qquad x_i = \alpha_i \xi_1 + \beta_i \xi_2 + \cdots + \nu_i \xi_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in die Form

$$(3.) \qquad f(\alpha\alpha)\,\xi_1^2 + 2f(\alpha\beta)\,\xi_1\xi_2 + \cdots + f(\nu\nu)\,\xi_n^2$$

übergeführt, also, da die Gleichungen $f(\alpha\beta) = 0$, $f(\alpha\gamma) = 0, \ldots$ auf unendlich viele Arten erfüllbar sind, auf unendlich viele Arten als Quadratsumme

$$(4.) \qquad \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \cdots + \lambda_n \xi_n^2$$

dargestellt. Das ***Trägheitsgesetz*** giebt die Invarianz der Anzahl aller, der positiven und der negativen Quadrate. Um also Rang und Signatur von f zu ***erkennen,*** genügt ***irgend eine*** Transformation in eine Quadratsumme.

Wir suchen dies nun insbesondere dadurch zu erreichen, dass wir die $\alpha, \beta, \ldots$ den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (5^{\alpha}.) \qquad & f_i(\alpha) = \lambda_1 \alpha_i \\ (5^{\beta}.) \qquad & f_i(\beta) = \lambda_2 \beta_i \\ & \cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

worin die λ also noch unbekannt sind, und ausserdem den Relationen

$$(6.) \qquad \Sigma \alpha_i^2 = 1, \ \Sigma \beta_i^2 = 1, \ldots$$

unterwerfen, und behaupten, dass die $\alpha, \beta, \ldots$, falls sie durch (5.) und (6.) schon völlig bestimmt sind, ein ***orthogonales System*** bilden, und dass dies im andern Falle durch Hinzufügung der nöthigen Bedingungsgleichungen ebenfalls stets erreichbar ist. Trifft das aber zu, so ist

$$(7.) \qquad \Sigma \alpha_i \beta_i = 0, \ \Sigma \alpha_i \gamma_i = 0, \ldots,$$

und aus (5.), (6.), (7.) folgt direct

$$f(\alpha\alpha) = \lambda_1, \ f(\beta\beta) = \lambda_2, \ f(\alpha\beta) = f(\alpha\gamma) = \cdots = 0,$$

also

$$(8.) \qquad f(xx) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i^2.$$

Damit die Gleichungssysteme $(5^{\alpha}.)$, $(5^{\beta}.)$, ... nicht allen $\alpha, \beta, \ldots$ den Werth Null ertheilen, ist zunächst nothwendig und hinreichend, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ als Wurzeln der ***„charakteristischen Gleichung"***

$$(9.) \qquad |a_{ik} - \lambda\, \varepsilon_{ik}| = 0 \qquad (\varepsilon_{ii} = 1,\ \varepsilon_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k)$$

zu wählen.

Eigenschaften der charakteristischen Gleichung:

I. ***Gleichung*** (9.) ***hat*** (bei reellen a_{ik}) ***nur reelle Wurzeln.*** (Beweis bekannt.)

II. ***Sind*** λ_1, λ_2 ***zwei verschiedene Wurzeln von*** (9.), ***genügen*** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ***dem Gleichungssystem*** $(5^{\alpha}.)$ ***und*** $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ***dem Gleichungssystem*** $(5^{\beta}.)$, ***so ist*** $\Sigma\, \alpha_i \beta_i = 0$ (und damit auch $f(\alpha\beta) = 0$).

Denn durch Composition der Gleichungen $(5^{\alpha}.)$ mit $\beta_1, \ldots, \beta_n$ und der Gleichungen $(5^{\beta}.)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ folgt

$$(10.) \qquad f(\alpha\beta) = \lambda_1 \Sigma\, \alpha_i \beta_i = \lambda_2 \Sigma\, \alpha_i \beta_i,$$

also $\Sigma\, \alpha_i \beta_i = 0$.

III. ***Der „Verschwindungsgrad"****) ***von***

$$|a_{ik} - \lambda_1\, \varepsilon_{ik}|$$

ist gleich der Multiplicität der Wurzel λ_1 ***von*** (9.). (M. a. W.: $|a_{ik} - \lambda\, \varepsilon_{ik}|$ hat nur *lineare* Elementartheiler.)

(Beweis in bekannter Weise einfach und elegant mit Hülfe von Determinanten-Identitäten zu führen.)

Nun folgt die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung sehr leicht.

A. Sind alle Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von (9.) ***verschieden***, so sind nach II die Gleichungen (7.) sämmtlich erfüllt. Da die α, die β, u. s. w. aus den homogenen Gleichungen (5.) nur in ihren Verhältnissen bestimmt sind, kann man stets noch bewirken, dass sie den Relationen (6.) genügen. Sie bilden dann also ein ***orthogonales System***, und Gleichung (8.) ist erfüllt.

B. Ist λ_1 eine ϱ-fache Wurzel von (9.), so werden die ϱ ersten Gleichungssysteme (5.) mit einander identisch. In diesem Gleichungssysteme,

*) „Nullity" von ***Sylvester*** (Amer. Journ. of Math. 6 (1884) p. 271) = Complement des Ranges der Determinante zu n. (Vgl. auch ***Encyclop.*** I. B. 1. 6 (*Netto*) S. 269.)

dem z. B. die α genügen müssen, sind aber nach III schon je $n-\varrho+1$ Gleichungen linear abhängig; dagegen giebt es $n-\varrho$ linear unabhängige darunter. Seien dies etwa

$$(11.)\quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)\,\alpha_1+\cdots \qquad +a_{1,n-\varrho}\,\alpha_{n-\varrho}+\cdots \quad +a_{1n}\,\alpha_n = 0 \\ \cdot \\ a_{n-\varrho,1}\,\alpha_1+\cdots+(a_{n-\varrho,n-\varrho}-\lambda_1)\,\alpha_{n-\varrho}+\cdots+a_{n-\varrho,n}\,\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Wählt man nun die n α irgendwie gemäss diesen $n-\varrho$ homogenen Gleichungen (11.), so können sie natürlich noch der Relation (6.) unterworfen werden.

Wählt man dann die n β gemäss denselben Gleichungen (11.) *und* gemäss der ebenfalls homogenen Gleichung

$$(12.)\qquad \alpha_1\beta_1+\cdots+\alpha_n\beta_n = 0,$$

so können auch sie noch der Relation (6.) unterworfen werden u. s. w.

Endlich wird die ϱ-te Reihe der Grössen $\alpha, \beta, \ldots$, sagen wir $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$, gemäss denselben $n-\varrho$ Gleichungen (11.) *und* gemäss den $\varrho-1$ homogenen Gleichungen

$$(13.)\qquad \Sigma\,\alpha_i\varrho_i = 0,\ \Sigma\,\beta_i\varrho_i = 0, \ldots$$

bestimmt und überdies, was wieder möglich ist, der Relation $\Sigma\,\varrho_i^2 = 1$ unterworfen.

So erhält man stets ein orthogonales System $\alpha, \beta, \ldots$, und Gleichung (8.) gilt in allen Fällen.

Nun folgt wesentlich derselbe Gedankengang wie bei *Sylvester* und Herrn *Netto* (a. a. O.).

Das Ausfallen von Quadraten in (8.) und das Vorzeichen der nicht ausfallenden Quadrate wird durch die *Wurzeln* der zu f gehörigen charakteristischen Gleichung (9.) bestimmt. Auf die Wurzeln kann man aber wiederum aus der Reihe ihrer mit abwechselnden Zeichen genommenen *Coefficienten* schliessen, d. h. aus der zu f gehörigen *„charakteristischen Reihe“*

$$(14.)\qquad A,\ \Sigma\,A_{ii},\ \Sigma\,A_{ii,kk}, \ldots,\ \Sigma\,a_{ii},\ 1,$$

wo A_{ii} die Hauptunterdeterminanten I. Stufe, $A_{ii,kk}$ die Hauptunterdeterminanten II. Stufe, u. s. w. von $A = |a_{ik}|$ bedeuten.

Denn, so viele Glieder im Anfang dieser Reihe verschwinden, so

viele der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ haben den Werth Null. Diese Zahl ist der Verschwindungsgrad $\nu(A)$, und der ***Rang*** r von f ist durch die Formel

$$r(f) = n - \nu(A) \tag{15.}$$

bestimmt.

Die ***Signatur*** von f aber, $S(f)$, ist gleich der Anzahl der positiven weniger der der negativen Werthe der $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Nun gilt der Satz*): „Hat die Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + \cdots \pm a_n = 0$$

lauter reelle Wurzeln, so ist die Anzahl der positiven Wurzeln gleich der Anzahl der Zeichenfolgen, die Anzahl der negativen Wurzeln gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, 1,$$

wobei die im Anfang etwa verschwindenden Glieder fortgelassen, intermediär verschwindende aber nach Belieben positiv oder negativ gezählt werden.“ Also ist

$$S(f) = \Sigma F - \Sigma W, \tag{16.}$$

wo ΣF die Anzahl der Zeichenfolgen, ΣW die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (14.) bedeutet.

Für die analytische Geometrie, wo es nur auf die ***Gleichung*** $f = 0$ ankommt, genügt als Definition der ***Signatur dieser Gleichung,*** der ***Form*** f oder ihrer ***Determinante*** schon

$$s(f) \equiv s(A) \equiv |S(f)| \equiv |\Sigma F - \Sigma W|. \tag{17.}$$

Wo im Folgenden auch immer von einer quadratischen Form mit der Determinante A die Rede ist, sollen unter $\nu(A), s(A)$ stets die aus ihrer charakteristischen Reihe unmittelbar abzulesenden Zahlen verstanden werden.

Die charakteristische Reihe (14.) von ***Sylvester*** erscheint mir in der That sehr viel schöner und praktisch nicht unbequemer als die aus der *Jacobi*schen Transformation herrührende, sonst in der Regel benutzte Reihe

$$A, A_{ii}, A_{ii,kk}, \ldots, a_{ii}, 1, \tag{18.}$$

wo jedes Glied eine, gewissen Bedingungen genügende, Hauptunterdeterminante der vorangehenden ist. In der sehr allgemeinen Reihe $C_0, C_1, \ldots, C_{n+1}$ von Herrn ***Gundelfinger*****) ist auch die charakteristische Reihe als Specialfall enthalten; anscheinend ist sie aber aus ihr noch nicht herausgelesen worden.

---

*) Vgl. *Netto*, a. a. O. S. 221.

) S. ***Hesse*, Anal. Geom. d. Raumes, III. Aufl. Leipzig 1876. Suppl. I. S. 449ff.

II.

Classification der Curven II. Ordnung.

Ist

$$(1.) \qquad f(x\,x) \equiv f(x_1\,x_2\,x_3) \equiv \Sigma a_{ik}\,x_i\,x_k = 0 \qquad (i,k=1,2,3)$$

die Gleichung einer Curve II. Ordnung, so ergiebt sich aus den verschiedenen Fällen, die bei der Darstellung von f als Quadratsumme möglich sind, und dem Trägheitsgesetz die Eintheilung dieser Curven in imaginäre oder reelle nicht entartende Curven, in imaginäre oder reelle Geradenpaare und in Doppel-Geraden. Ist

$$(2.) \qquad |a_{ik}| \equiv A,$$

so ergeben die Werthe der Zahlen $v(A)$ und $s(A)$ unmittelbar die nothwendigen und hinreichenden Kriterien für diese *projective Eintheilung.*

Die weitere *affine* Eintheilung der Curven II. Ordnung wird, wie es auch bei Herrn *Koehler* (a. a. O.) geschieht, durch die *projective* Eintheilung ihres Schnittes mit der uneigentlichen Geraden bestimmt. Das ist aber das *Punktepaar*

$$(3.) \qquad f(x_1\,x_2\,0) = 0$$

mit der Determinante $A_{33} \equiv |a_{ik}|$ $(i,\,k = 1,2)$. Also bestimmen $v(A_{33})$ und $s(A_{33})$ die affine Eintheilung von (1.).

Durch Composition der Classificationen von $f(x_1\,x_2\,x_3)$ und $f(x_1\,x_2\,0)$ erhalten wir also das Gitterwerk der *Tabelle I**). Durch Combination der den Colonnen und Zeilen zukommenden geometrischen Merkmale erhalten wir die in die einzelnen Felder gehörigen Curvenformen. Die in den frei bleibenden Feldern sich kreuzenden Zeilen und Colonnen schliessen einander geometrisch und algebraisch aus. Da jede Curvenform nur in *einem* Feld steht und jedes Feld nur *eine* Curvenform enthält, giebt Tabelle I *die nothwendigen und hinreichenden Kriterien der Classification.*

Tabelle I stimmt — abgesehen von der verschiedenen *Kriterienform* — vollkommen mit der *Koehler*schen Tabelle I überein, sobald dort auf *Hesse*sche Coordinaten specialisirt wird.

III.

Classification der Curven II. Klasse.

Ist

$$(1.) \qquad \varphi(u\,u) \equiv \varphi(u_1\,u_2\,u_3) \equiv \Sigma \alpha_{ik}\,u_i\,u_k = 0 \qquad (i,k=1,2,3)$$

die Gleichung einer Curve II. Klasse, so ist zunächst die *projective* Classi-

*) Die Tabellen sind am Schluss der Arbeit zusammengestellt.

fication nebst ihren Kriterien einfach dualistisch aus der vorigen Nummer oder Tabelle I abzulesen, wobei natürlich nur die Determinante

$$(2.) \qquad |\alpha_{ik}| \equiv A$$

nebst ihren Unterdeterminanten A_{ik} etc. an Stelle von A, A_{ik} etc. tritt.

Zur weiteren *affinen* Eintheilung benutzen wir die ***projective Eintheilung des uneigentlichen Punktepaares, für das die beiden hindurchgehenden Geraden des Strahlbüschels II. Ordnung*** (1.) ***zusammenfallen.*** Wir wollen es kurz das ***im Unendlichen von*** (1.) ***erzeugte Punktepaar*** nennen.

u_1, u_2, u_3 sind jetzt die ***Hesse***schen Coordinaten irgend einer Geraden der Ebene; u_1, u_2 bestimmen also ihren uneigentlichen Punkt. Die ***Hesse***schen Punktcoordinaten x_1, x_2 $(x_3 = 0)$ desselben Punktes genügen also der Gleichung

$$(3.) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0;$$

d. h. u_1, u_2 und die der Gleichung (3.) genügenden x_1, x_2 sind contragrediente Punktcoordinaten desselben uneigentlichen Punktes, nämlich desjenigen der Geraden $(u_1 u_2 u_3)$, und man hat

$$(4.) \qquad x_1 : x_2 = u_2 : -u_1.$$

Zu jedem Werthepaar u_1, u_2 liefert nun die Gleichung

$$(1^a.) \qquad \varphi(u_1 u_2 u_3) \equiv \alpha_{33} u_3^2 + 2\,\varphi_3(u_1 u_2 0)\, u_3 + \varphi(u_1 u_2 0) = 0$$

zwei Werthe von u_3. Damit sie zusammenfallen, ist nothwendig und hinreichend, dass u_1, u_2 der Gleichung

$$(5.) \qquad \alpha_{33}\,\varphi(u_1 u_2 0) - \varphi_3(u_1 u_2 0)^2 = 0$$

genügen. Setzt man hierin $u_1 = -x_2$, $u_2 = x_1$ nach (4.), und ordnet nach x_1, x_2, so folgt

$$(6.) \qquad A_{11} x_1^2 + 2 A_{12} x_1 x_2 + A_{22} x_2^2 = 0$$

als Gleichung des von der Curve (1.) erzeugten uneigentlichen Punktepaares, der wir auch die Form

$$(6^a.) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geben können.

Setzt man also

$$(7.) \qquad |A_{ik}| = \mathfrak{A}_3 \qquad (i, k = 1, 2),$$

sodass — nebenbei bemerkt — $\mathfrak{A}_3 = a_{33} A$ ist, so liefern $v(\mathfrak{A}_3)$ und $s(\mathfrak{A}_3)$ die weitere affine Eintheilung der Curven II. Klasse. Durch Composition der Classificationen der quadratischen Formen (1.) und (6.) erhält man das Gitter von *Tabelle* II, durch Combination der zugehörigen geometrischen Merkmale ihre Ausfüllung. Die hierbei noch weiter trennbaren Curvenformen, reelles Punktepaar auf eigentlicher Geraden, Doppelpunkt, werden einfach danach gespalten, ob die uneigentliche Gerade der Curve $\varphi = 0$ angehört oder nicht, d. h. ob $a_{33} = 0$ oder $\neq 0$.

An die Entstehung der Tabelle II knüpfen wir noch einige Bemerkungen.

Die quadratische Hülfsform oder Hülfsgleichung (6.) stellt sich hier einfach als Schnitt *der zu* (1.) *adjungirten Punktcurve* mit der uneigentlichen Geraden heraus. Die adjungirte Punktcurve ist aber bei $v(A) = 0$ mit (1.) identisch, stellt bei $v(A) = 1$ den geradlinigen Träger des Punktepaares (1.) dar und löst sich bei $v(A) = 2$ in alle Punkte der Ebene auf. Das von (1.) „erzeugte uneigentliche Punktepaar“ besteht daher bei $v(A) = 0$ aus den uneigentlichen Punkten der Curve (1.) selbst, bei $v(A) = 1$ aus den uneigentlichen Punkten der reellen Geraden, auf der das Punktepaar (1.) ruht, bei $v(A) = 2$ aus den uneigentlichen Punkten aller durch den Doppelpunkt (1.) gelegten Geraden, d. h. aus allen uneigentlichen Punkten. — Diese Erwägungen *können* auch zur Ausfüllung der Tabelle II verwerthet werden.

Endlich kann die Ausfüllung der Tabelle II auch auf Grund folgender Ueberlegung geschehen: In der Colonne $v(A) = 0$ ist das von $\varphi = 0$ „erzeugte“ Punktepaar einfach das uneigentliche der Curve selbst, sodass die vier nicht entartenden Curvenformen auf Grund ihrer Definition in die entsprechenden Zeilen rücken. In den übrigen Colonnen handelt es sich um Punktepaare und Doppelpunkte. Da nach dem Trägheitsgesetz eine Coordinatentransformation, die nur u_3 ungeändert lässt, weder die Colonnen- noch die Zeilen-Kriterien ändert, so kann man das Punktepaar stets als zwei Coordinaten-Ecken, bezw. zwei reelle oder imaginäre Punkte auf einer Coordinatenseite, den Doppelpunkt stets als eine Ecke annehmen, hat also die Gleichung des Punktepaares dann in der Form $u_1^2 + u_2^2 = 0$, $u_1^2 - u_2^2 = 0$ etc. und braucht nur *analytisch* zu prüfen, in welche Zeile diese Gleichungsform gehört.

IV.

Classification der Flächen II. Ordnung.

Genau nach demselben Princip wie Tabelle I in Nr. II entsteht die *Tabelle* III für die Flächen II. Ordnung

$$(1.) \qquad f(x\,x) \equiv f(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \qquad (i,k = 1,2,3,4,).$$

Hier besteht nun wieder, abgesehen von der Kriterien*form*, völlige Uebereinstimmung mit der *Koehler*schen Tabelle III, falls dort die zweite Colonne mit der dritten vertauscht und auf *Hesse*sche Coordinaten specialisirt wird. Den vier die Classification bestimmenden Zahlen $v(A), s(A), v(A_{44}), s(A_{44})$ entsprechen die vier dem gleichen Zweck dienenden Invarianten I_0, I_1, J_0, J_1 bei Herrn *Hensel* (a. a. O.).

V.

Classification der Flächen II. Klasse.

Die *projective* Eintheilung der Flächen II. Klasse

$$(1.) \qquad \varphi(u\,u) \equiv \varphi(u_1\,u_2\,u_3\,u_4) \equiv \Sigma\, \alpha_{ik}\, u_i\, u_k = 0 \qquad (i,k = 1,2,3,4)$$

ist wieder einfach dualistisch aus Tabelle III abzulesen.

Die weitere *affine* Eintheilung gründen wir auf das dem in Nr. III benutzten genau entsprechende Princip, d. h. wir benutzen die *projective* Classification des Strahlbüschels II. Ordnung (d. h. der Curve II. Klasse) in der uneigentlichen Ebene, für dessen Geraden die beiden hindurchgehenden Ebenen von (1.) zusammenfallen. Wir wollen dieses Strahlbüschel II. Ordnung wieder kurz *die von* (1.) *erzeugte uneigentliche Curve* nennen. Die Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 der Strahlen dieses Büschels genügen der Gleichung, die durch Annullirung der Discriminante der quadratischen Gleichung in u_4

$$(1^a.) \qquad \varphi(u_1\,u_2\,u_3\,u_4) \equiv \alpha_{44}\,u_4^2 + 2\,\varphi_4(u_1\,u_2\,u_3\,0)\,u_4 + \varphi(u_1\,u_2\,u_3\,0) = 0$$

entsteht, d. h. der Gleichung

$$(2.) \qquad \alpha_{44}\,\varphi(u_1\,u_2\,u_3\,0) - \varphi_4(u_1\,u_2\,u_3\,0)^2 = 0.$$

Ordnet man hier nach u_1, u_2, u_3, so folgt

$$(3.) \quad A_{22\,33}\,u_1^2 + A_{33\,11}\,u_2^2 + A_{11\,22}\,u_3^2 + 2\,A_{12\,33}\,u_1\,u_2 + 2\,A_{23\,11}\,u_2\,u_3 + 2\,A_{31\,22}\,u_3\,u_1 = 0,$$

wo $A_{ik,\,lm}$ die aus $A \equiv |\alpha_{ik}|$ durch Streichung von Zeile i und l und Colonne k und m entstehende Subdeterminante II. Grades bedeutet. Gleichung (3.) kann daher auch in die Form gesetzt werden:

$$(3^a.)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 & y_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 & y_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 & y_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wenn hierin wieder

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} = u_l \qquad (i,k,l = 1,2,3)$$

gesetzt wird.

Bedeutet also

$$(5.)\qquad \mathfrak{A}_4 = \begin{vmatrix} A_{22\,33} & A_{12\,33} & A_{13\,22} \\ A_{12\,33} & A_{11\,33} & A_{23\,11} \\ A_{22\,31} & A_{23\,11} & A_{11\,22} \end{vmatrix},$$

so liefern $v(\mathfrak{A}_4)$ und $s(\mathfrak{A}_4)$ die affine Classification von (1.). Durch Composition der Classificationen der beiden quadratischen Formen (1.) und (3.) erhält man das Gitter, durch Combination der zugehörigen geometrischen Merkmale die Ausfüllung der *Tabelle* IV. Hierbei sind wieder bloss das Punktepaar auf eigentlicher Geraden und der Doppelpunkt noch weiterer Spaltung fähig, die sich durch die Unterscheidung $\alpha_{44} = 0$ oder $\neq 0$ unmittelbar vollzieht.

Hieran knüpfen wir noch folgende Bemerkungen.

Die quadratische Hülfsform oder Hülfsgleichung (3.) enthüllt sich hier durch die Gleichungsform $(3^a.)$*) für $v(A) = 0$ als Gleichung des *Tangenten*complexes von (1.), soweit er, da $x_4 = y_4 = 0$, der uneigentlichen Ebene angehört. Diese Gleichung leistet mehr als die Gleichung der zu (1.) adjungirten Fläche II. Ordnung. Denn die Gleichung des Tangentencomplexes giebt*) bei $v(A) = 0$ alle Tangenten der Fläche (1.), bei $v(A) = 1$ alle Geraden, die den Kegelschnitt (1.) treffen, bei $v(A) = 2$ alle Geraden, die die Gerade des Punktpaares (1.) treffen, und ist erst bei $v(A) = 3$ identisch erfüllt, während die zu (1.) adjungirte Gleichung bei $v(A) = 0$ die Fläche (1.) selbst giebt, bei $v(A) = 1$ die Ebene des Kegel-

*) S. *Clebsch-Lindemann* a. a. O.

schnittes (1.) und schon bei $v(A) = 2$ identisch erfüllt ist. Hierauf beruht der Erfolg unserer Methode. Die durch Gleichung (3.) oder (3ª.) dargestellte, von (1.) „erzeugte“ uneigentliche Curve II. Klasse umhüllt also bei $v(A) = 0$ alle uneigentlichen Tangenten der Fläche, sie ist also, wenn die Fläche einen nicht entartenden uneigentlichen Schnitt besitzt, eben dieser Schnitt, und, wenn die Fläche von der uneigentlichen Ebene berührt wird, der Berührungspunkt. Sie ist bei $v(A) = 1$ das uneigentliche Punktepaar des Kegelschnittes (1.), der in eigentlicher Ebene liegt, und besteht für einen Kegelschnitt in der uneigentlichen Ebene aus sämmtlichen uneigentlichen Geraden. Sie umhüllt bei $v(A) = 2$ alle uneigentlichen Geraden, die die Gerade des Punktepaares treffen, ist also ein Punkt oder besteht aus allen uneigentlichen Geraden. Sie besteht endlich bei $v(A) = 3$ aus sämmtlichen uneigentlichen Geraden. — Diese Betrachtungen können ebenfalls zur Erzeugung der Tabelle IV dienen.

Schliesslich kann die Ausfüllung der Colonnen $v(A) \geqq 1$ auch dadurch erfolgen, dass jetzt in der Raumgeometrie auch die Kenntniss der einfachsten Gleichungsformen der Kegelschnitte vorausgesetzt werden darf und diese immer in Coordinatenebenen angenommen werden können. Man braucht dann nur analytisch zu prüfen, in welche Zeile die betreffende Gleichungsform gehört.

Schlussbemerkung.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass aus den vorstehenden systematischen und in systematischer Weise gewonnenen Kriterien leicht andere äquivalente und für den praktischen Gebrauch noch bequemere hergeleitet werden können. Mnemotechnischen Ansprüchen dürften freilich diese systematischen Tabellen am meisten genügen.

Will man bei den einzelnen Kategorien der Gebilde II. Ordnung und II. Klasse noch die *orthogonal ausgezeichneten* hervorheben, d. h. in der uneigentlichen Ebene noch den imaginären Kugelkreis berücksichtigen, so erscheint wieder die Benutzung eines *orthogonalen Hesse*schen Systems oder eines solchen, bei dem die eigentlichen Seiten des Coordinatendreiecks (bezw. -Tetraeders) auf einander senkrecht stehen und nun auch die Einheitsstrecken auf allen Axen gleich sind, naturgemäss. Die Vervollständigung der Classification nach *dieser* Richtung werde ich indessen bei anderer Gelegenheit geben.

Tabelle I.

Classification der Curven II. Ordnung.

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0.$$

$f=0$ ist für $\begin{cases} v(A)= \\ s(A)= \end{cases}$ / $f=0$ besitzt im ∞ für $\overbrace{v(A_{33})}^{\parallel}$ $\overbrace{s(A_{33})}^{\parallel}$		0 nicht entartend		1 Geradenpaar		2 Doppelgerade	3 alle Punkte der Ebene
		3 imaginär	1 reell	2 imaginär	0 reell	(1) (reell)	(0)
0 ein Punktepaar	2 imaginär	Imaginäre nicht entartende Curve	Ellipse	Imaginäres nicht paralleles Geradenpaar			
	0 reell		Hyperbel		Reelles nicht paralleles Geradenpaar		
1 Doppelpunkt	(1) (reell)		Parabel	Imaginäres Parallelenpaar	Reelles eigentliches Parallelenpaar	Eigentliche Doppelgerade	
2 alle Punkte	(0)				Eigentliche Gerade + uneigentl. Gerade	Uneigentliche Doppelgerade	Alle Punkte der Ebene

Tabelle II.

Classification der Curven II. Klasse.

$$\varphi(u_1\, u_2\, u_3) = 0.$$

$\varphi = 0$ ist für $\begin{cases} v(\Delta) = \\ s(\Delta) = \end{cases}$ / $\varphi = 0$ erzeugt im ∞ für $\overbrace{v(\mathfrak{A}_3)}$ $\overbrace{s(\mathfrak{A}_3)}$		0 nicht entartend		1 Punktepaar		2 Doppelpunkt	3 alle Geraden der Ebene
		3 imaginär	1 reell	2 imaginär	0 reell	(1) (reell)	(0)
0 Punktepaar	2 imaginär	Imaginäre nicht entartende Curve	Ellipse				
	0 reell		Hyperbel				
1 Doppelpunkt	(1) (reell)		Parabel	Imaginäres eigentl. Punktepaar	Reelles* Punktepaar auf eigentl. Geraden		
2 alle Punkte	(0)			Imaginäres uneigentl. Punktepaar	Reelles uneigentl. Punktepaar	Doppelpunkt**	Alle Geraden der Ebene

	*	**
$\alpha_{33} \neq 0$	Beide Punkte eigentlich	eigentlich
$\alpha_{33} = 0$	Ein Punkt uneigentlich	uneigentlich

Tabelle III.

Classification der Flächen II. Ordnung.

$$f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = 0.$$

$f=0$ ist für $\begin{cases} v(A)= \\ s(A)= \end{cases}$ / $f=0$ bes. im ∞ für $v(A_{44})$ $s(A_{44})$		0 nicht entartend			1 Kegel		2 Ebenen-Paar		3 Doppel-Ebene	4 Alle Punkte des Raumes
		4 imaginär	2 elliptisch	0 hyperbolisch	3 imaginär	1 reell	2 imaginär	0 reell	(1) (reell)	(0)
0 nicht entartende Curve	3 imaginär	Imagin. nicht entartend. Fläche	Ellipsoid		Imagin. eigentl. Kegel					
	1 reell		Elliptisch. Hyperboloid	Hyperbol. Hyperboloid		Reeller eigentl. Kegel				
1 Geradenpaar	2 imaginär		Elliptisch. Paraboloid		Imagin. Cylinder	Elliptisch. Cylinder	Imagin. nicht parallel. Ebenen-Paar			
	0 reell			Hyperbol. Paraboloid		Hyperbol. Cylinder		Reelles nicht parallel. Ebenen-Paar		
2 Doppel-Gerade	(1) (reell)					Parabol. Cylinder	Imagin. parallel. Ebenen-Paar	Reelles eigentl. paralleles Ebenen-Paar	Eigentliche Doppel-Ebene	
3 Alle Punkte	(0)							Eigentl. Ebene + uneigentl. Ebene	Uneigentl. Doppel-Ebene	Alle Punkte des Raumes

Tabelle IV.

Classification der Flächen II. Klasse.

$$\varphi(u_1\, u_2\, u_3\, u_4) = 0.$$

$\varphi = 0$ ist für $\begin{cases} v(A) = \\ s(A) = \end{cases}$ / $\varphi = 0$ erzeugt im ∞ für $v(\mathfrak{A}_4)$ $s(\mathfrak{A}_4)$		0 nicht entartend			1 Kegelschnitt (*K. S.*)		2 Punkte-Paar		3 Doppelpunkt	4 Alle Ebenen des Raumes
		4 imaginär	2 elliptisch	0 hyperbolisch	3 imaginär	1 reell	2 imaginär	0 reell	(1) (reell)	(0)
0 nicht entartende Curve	3 imaginär	Imaginär. nicht entartend. Fläche	Ellipsoid							
	1 reell		Elliptisch. Hyperboloid	Hyperbolisches Hyperboloid						
1 Punktepaar	2 imaginär				Imaginär. eigentl. *K. S.*	Ellipse				
	0 reell					Hyperbel				
2 Doppelpunkt	(1) (reell)		Elliptisch. Paraboloid	Hyperbolisches Paraboloid		Parabel	Imaginär. eigentl. Punktepaar	Reelles* Punktepaar auf eigentl. Geraden		
3 Alle Geraden	(0)				Imaginär. uneigentl. *K. S.*	Reeller uneigentl. *K. S.*	Imaginär. uneigentl. Punktepaar	Reelles uneigentl. Punktepaar	Doppelpunkt**	Alle Ebenen des Raumes

	*	**
$\alpha_{44} \neq 0$	Beide Punkte eigentl.	eigentlich
$\alpha_{44} = 0$	Ein Punkt uneigentl.	uneigentlich

Neue Formeln für die *Bernoulli*schen Zahlen.

(Mittheilung einiger Resultate einer umfangreicheren, in den Schriften der Physikalisch-Oekonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. [Jg. XLIV, 1903] erscheinenden Arbeit über die ganzen Potenzen der Cotangente und der Cosecante).

(Von Herrn *Louis Saalschütz* in Königsberg.)

Wir verstehen unter μ eine positive ganze Zahl und setzen

$$(1.)\quad \operatorname{cosec}^{\mu} x = x^{-\mu} + \zeta^{\mu}_{2-\mu}\, x^{-\mu+2} + \zeta^{\mu}_{4-\mu}\, x^{-\mu+4} + \zeta^{\mu}_{6-\mu}\, x^{-\mu+6} + \cdots,$$

worin die Indices und die Exponenten anfangs negativ, später positiv sind; für $\mu = 1$ ist

$$(2.)\qquad \zeta^{1}_{2k-1} = \frac{2\,(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}\, B_k.$$

Aus der ohne Schwierigkeit erweislichen Gleichung

$$(3.)\qquad \mu\,(\mu+1)\operatorname{cosec}^{\mu+2} x = \mu^2 \operatorname{cosec}^{\mu} x + \frac{d^2 \operatorname{cosec}^{\mu} x}{dx^2}$$

folgt die Beziehung zwischen den Coefficienten

$$(4.)\qquad \zeta^{\mu+2}_{s} = \frac{\mu}{\mu+1}\,\zeta^{\mu}_{s} + \frac{(s+1)\,(s+2)}{\mu\,(\mu+1)}\,\zeta^{\mu}_{s+2},$$

welche, sei s positiv, Null oder negativ, richtig ist. Für negative Indices, die wir als $-m$ bezeichnen, erhalten wir mit Hülfe von (4.), wenn wir unter $\Psi_k(a, n)$ die Summe der Combinationen in der k-ten Klasse der Elemente $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{(a+2)^2}, \frac{1}{(a+4)^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}$ verstehen, und die Gleichung

$$(5.)\qquad \Psi_k(a, n) = \Psi_k(a, n-2) + \frac{1}{n^2}\,\Psi_{k-1}(a, n-2)$$

benutzen, die Formeln:

$$(6.)\quad \begin{cases} \zeta^{\mu}_{-m} = (m-1)!\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(\mu-2)}{2\cdot 4\cdots(\mu-1)}\,\Psi_{\frac{m-1}{2}}(1, \mu-2) & \mu \text{ und } m \text{ ungerade,} \\ \zeta^{\mu}_{-m} = (m-1)!\,\dfrac{2\cdot 4\cdots(\mu-2)}{3\cdot 5\cdots(\mu-1)}\,\Psi_{\frac{m-2}{2}}(2, \mu-2) & \mu \text{ und } m \text{ gerade.} \end{cases}$$

Nehmen wir nun μ als ungerade an und vergleichen in der Gleichung

$$\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cosec}^{\mu} x = \operatorname{cosec}^{\mu+1} x$$

beiderseits die Coefficienten von x^{-2}, so erhalten wir

$$(7.) \qquad \sum_{k=0}^{\frac{\mu-1}{2}} \zeta^{\mu}_{2k-\mu}\, \zeta^{1}_{\mu-2k-2} = \zeta^{\mu+1}_{-2}$$

und demnach, wenn wir die Werthe aus (2.) und (6.) substituiren, $\mu = 2m+1$ setzen und die Abkürzung

$$(8.) \qquad 2(2^{2h-1}-1)\, B_h = \mathbf{B}_h$$

einführen,

$$(9.) \quad \sum_{k=0}^{m-1} (\Psi_{m-k}(1, 2m-1)\, \mathbf{B}_{m-k}) + 1 = \Big(\frac{2\cdot 4\cdots(2m)}{1\cdot 3\cdots(2m-1)}\Big)^2 \cdot \frac{1}{2m+1}.$$

Diese Gleichung ist eine Recursionsformel zwischen den ***Bernoullischen Zahlen,*** und sie scheint dem Verf. deshalb von einigem Interesse zu sein, weil sie von denen, in welchen diese Zahlen *linear* auftreten, soweit ihm bekannt, die erste ist, ***worin die Bernoullischen Zahlen sämmtlich positive Coefficienten haben,*** deren linke Seite also aus lauter positiven Gliedern besteht.

Wir können aus ihr „verkürzte Recursionsformeln" zwischen B_m und *beliebig vielen* ihr vorangehenden *Bernoulli*schen Zahlen ableiten*), deren linke Seite den gleichen Charakter hat, während die Glieder der rechten Seite abwechselnde Vorzeichen besitzen, und deren Grenzfall eine independente Darstellung von B_m bildet.

Zu diesem Zweck setzen wir in (9.) $m-1$ statt m und ziehen die entstehende Gleichung von (9.) ab, wobei (5.) zur Anwendung gelangt, und die Gleichung mit $(2m-1)^2$ multiplicirt wird. In dieser Art operiren wir weiter, wodurch die linke Seite sich um je ein Glied verkürzt. Werden nun rechts die gleichen Operationen wie links ausgeführt, so erhalten wir folgende Formel zwischen den Zahlen $\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_{m-1}, \mathbf{B}_{m-2}, \ldots, \mathbf{B}_r$ und somit zwischen den *Bernoulli*schen Zahlen $B_m, B_{m-1}, B_{m-2}, \ldots, B_r$:

$$(10.) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-r} \Psi_{m-k-r}(1, 2m-2r-1)\, \mathbf{B}_{m-k} \\ \displaystyle = \Big(\frac{2\cdot 4\cdots(2m-2r)}{1\cdot 3\cdots(2m-2r-1)}\Big)^2 \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \cdot \frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-2k-1))^2 C_k(2^2, (2r-2k)^2)}{2m-2k+1}; \end{cases}$$

*) Recursionsformeln zwischen beliebig vielen *Bernoulli*schen Zahlen, aber von anderem Charakter, sind zuerst von Herrn ***Haussner*** aufgestellt worden. (Zur Theorie der *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen. Nachrichten der Königl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 27. Decbr. 1893.)

darin bedeutet $C_k(2^2, (2n)^2)$ die Summe der Combinationen *mit Wiederholungen* der Elemente $2^2, 4^2, 6^2, \ldots, (2n)^2$; ebenso soll später $C_k(1^2, n^2)$ diejenige der Elemente $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ bezeichnen, sodass im Besonderen

$$C_k(2^2, 2^2) = 2^{2k}, \quad C_k(1^2, 1^2) = 1; \quad C_0(2^2, (2n)^2) = C_0(1^2, n^2) = 1$$

ist.

Die Gleichung (10.) gilt auch noch für $r = m$, was allerdings eines besonderen Beweises bedarf, und giebt dann die independente Darstellung

$$(11.) \quad \mathbf{B}_m = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k 2^{2k} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-2k-1))^2 \, C_k(1^2, (m-k)^2)}{2m+1-2k}.$$

Hieraus folgt mit Hülfe einiger zahlentheoretischer Betrachtungen*) ein dem *v. Staudt*schen Theorem analoger Satz für $\mathbf{B}_m$, nämlich:

Der Cosecanten-Coefficient $\mathbf{B}_m$ ist gleich einer ganzen Zahl, vermehrt oder vermindert, je nachdem m ungerade oder gerade ist, um die Summe der reciproken Werthe aller ungeraden *Staudt*schen Primzahlen für $2m$.

---

*) darunter des Satzes: Wenn $2r+1=p$ eine Primzahl ist, so ist die Summe der Combinationen mit Wiederholungen in der q-ten Klasse der Elemente $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, r^2$ congruent 1 oder 0 für den Modul p, je nachdem q ein ganzes Vielfaches von r ist, oder nicht.

Angenäherte Auflösung von Congruenzen nach Primmodulsystemen in Zusammenhang mit den Einheiten gewisser Körper.

(Von Herrn *H. Kühne* in Dortmund.)

1.

Aus dem Integritätsbereich der n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ sei das Modulsystem

$$P = (p, f_1(x_1), f_2(x_2; x_1), \ldots, f_n(x_n; x_1 \ldots x_{n-1}))$$

von folgender Eigenschaft entnommen: p ist eine ungerade Primzahl, $f_1(x_1)$ ist nach p irreducibel, f_2 als Function von x_2 betrachtet (modd $p, f_1(x_1)$) irreducibel u. s. w. Jedes f_k muss x_k, kann $x_l\,(l < k)$ und darf nicht $x_l\,(l > k)$ enthalten. Ein solches System ist ein *Primmodulsystem**). Ich betrachte alle Grössen des Integritätsbereiches nur modd P und nenne den dadurch bestimmten Bereich $\mathfrak{B}$. Die Anzahl der Grössen des Bereichs $\mathfrak{B}$ ist beschränkt, und zwar ist sie $q = p^{m_1 m_2 \ldots m_n}$, wenn $m_1, \ldots$ die Grade in den Functionen f sind.

Dem Bereich $\mathfrak{B}$ werde eine neue Unbestimmte x adjungirt: es entstehe ein Bereich B. Er umfasst alle rationalen Functionen von x, deren Coefficienten dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehören. Die Grössen von B denken wir uns nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$$a = \mathfrak{a}_\alpha x^\alpha + \mathfrak{a}_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \cdots .$$

Für den Grad α von a soll ein neues Zeichen eingeführt werden, nämlich $\alpha = Gr\,a$. Für alle ganzen Grössen a ist α eine positive ganze Zahl. Gr genügt, wie ersichtlich, der Functionalgleichung $Gr\,(ab) = Gr\,a + Gr\,b$.

*) Dieses Journal Bd. 124 S. 121ff.

Diese rechtfertigt es, wenn wir unter dem Grade einer gebrochenen Grösse $c = \frac{a}{b}$ die Differenz $Gr\,a - Gr\,b$ verstehen. Die Function Gr kann also jetzt alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe annehmen.

Hat eine gebrochene Grösse des Bereichs B die Gestalt

$$\frac{\mathfrak{a}_\alpha x^{\alpha+\beta} + \cdots + \mathfrak{a}_0 x^\beta + \mathfrak{a}_{-1} x^{\beta-1} + \cdots + \mathfrak{a}_{-\beta}}{x^\beta},$$

so kann sie auch

$$\mathfrak{a}_\alpha x^\alpha + \cdots + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_{-1} x^{-1} + \cdots + \mathfrak{a}_{-\beta} x^{-\beta}$$

geschrieben werden, und ihr Grad ist α. Eine derartige gebrochene Grösse erinnert an die Decimalzahlen des gewöhnlichen Zahlenrechnens. Wenn eine gebrochene Grösse des Bereichs B sich so darstellen lässt, so soll sie eine *decimale* heissen.

Es sei $a = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ keine decimale Grösse. Der erste Coefficient des Nenners kann durch geeignetes Erweitern des Bruches immer zu 1 gemacht werden. Dann kann man die Division $\varphi : \psi$ formal ausführen und gelangt zu einer Entwickelung $\chi(x)$, die nach fallenden Potenzen von x fortschreitet, und einem Rest $\vartheta(x)$, dessen Grad so gross negativ gewählt werden kann, wie man will. Wir wollen sagen: *$Gr\,\vartheta$ sei beliebig tief.* Ist $Gr\,\varphi = \beta$, $Gr\,\psi = \gamma$, so ist $Gr\,\chi = Gr\,a = \beta - \gamma = \alpha$, und es wird

$$a \equiv \chi + \frac{\vartheta}{\psi} \equiv \mathfrak{a}_\alpha x^\alpha + \cdots + \mathfrak{a}_0 + \cdots + \mathfrak{a}_{-\omega} x^{-\omega} + \Omega,$$

wobei $Gr\,\Omega < -\omega$ gemacht werden kann. So ergiebt sich der Satz:

Durch Subtraction einer Grösse von beliebig tiefem Grade lässt sich jede gebrochene Grösse des Bereichs B in eine decimale verwandeln.

In Uebereinstimmung mit der Ausdrucksweise des gewöhnlichen Zahlenrechnens sagen wir:

Die decimale Grösse χ ist eine Annäherung an die Grösse a. Noch deutlicher wird die Aehnlichkeit der eben abgeleiteten Entwickelung mit den gewöhnlichen decimalen Zahlen, wenn man auf den Fall $P = p =$ einer Primzahl unter 10 sich beschränkt und

$$\mathfrak{a}\,x^a + \mathfrak{b}\,x^{a-1} + \cdots \quad \text{einfach} \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

schreibt, z. B. bedeuten mod 5

$$121, \qquad 1{,}43, \qquad 0{,}013$$

die Grössen $x^2 + 2x + 1$, $1 + 4x^{-1} + 3x^{-2}$, $x^{-2} + 3x^{-3}$.

2.

Es sei

$$F(y) = y^{\mu} + a_1 y^{\mu-1} + \cdots + a_{\mu}$$

eine im Bereich B irreducible Function, deren Coefficienten ganze Grössen von B sind. Ferner existire eine ganze Zahl η von der Art, dass

$$k\eta \geqq \alpha_k \quad (k = 0, \ldots, \mu;\ \alpha_k = Gr\, a_k)$$

ist, und dass in dieser Reihe mindestens einmal das Gleichheitszeichen gilt.

Nun setze ich

$$y = x^{\eta} z,$$

so wird

$$\begin{aligned} F &\equiv x^{\mu\eta}\ z^{\mu} + \cdots + a_k x^{(\mu-k)\eta} z^{\mu-k} + \cdots \\ &\equiv x^{\mu\eta} [z^{\mu} + \cdots + a_k x^{-k\eta}\ z^{\mu-k} + \cdots] \\ &\equiv x^{\mu\eta}\ G(z), \end{aligned}$$

und dabei ist

$$Gr(a_k x^{-k\eta}) = \alpha_k - k\eta \leqq 0;$$

d. h. die Coefficienten in G sind decimale Grössen und höchstens vom Grade 0. Nun werde $G(z)$ nach fallenden Potenzen von x geordnet, dann ist die höchste vorkommende Potenz die 0-te. $\mathfrak{G}(z)$ sei der Factor von x^0, dann enthält $\mathfrak{G}(z)$ das Glied z^{μ} und hat als Coefficienten der übrigen Potenzen von z Grössen des Bereichs $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{G}(z)$ werde nun im Bereich $\mathfrak{B}$ in theilerfremde Factoren zerlegt:

$$\mathfrak{G}(z) \equiv \mathfrak{G}_1(z)\, \mathfrak{G}_2(z) \ldots \mathfrak{G}_m(z);$$

jedes $\mathfrak{G}_i(z)$ ist im Bereich $\mathfrak{B}$ also entweder irreducibel oder eine Potenz einer irreducibelen Function. Fasst man die Factoren in irgend einer Weise in zwei Gruppen zusammen, so kann man schreiben

$$\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{H}\mathfrak{K}.$$

Da $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ nach P theilerfremd sind, giebt es zwei Grössen $\overline{\mathfrak{H}}, \overline{\mathfrak{K}}$, die der Bedingung

$$\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{K}} + \mathfrak{K}\overline{\mathfrak{H}} \equiv 1$$

genügen.

Es bedeute jetzt $\mathfrak{L}$ wieder eine Function von z, deren Coefficienten dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehören, und $\mathfrak{L}$ sei in z von geringerem als dem μ-ten

Grade. Die Grade von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ in z seien ϱ und σ, so ist $\varrho+\sigma=\mu$ und damit $\varrho, \sigma \leqq \mu-1$. Nun sei ferner

$$\overline{\mathfrak{H}}\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{X}\mathfrak{H}+\mathfrak{H}', \qquad \overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{Y}\mathfrak{K}+\mathfrak{K}',$$

wobei die Grade von $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{K}'$ in z bezüglich kleiner als ϱ oder σ sein sollen. Dann folgt

$$(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})\,\mathfrak{H}\mathfrak{K}+\mathfrak{H}'\mathfrak{K}+\mathfrak{K}'\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{L}.$$

Die Grade von $\mathfrak{K}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{K}', \mathfrak{L}$ sind $< \mu$; $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ hat aber den Grad μ, also muss

$$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y} \equiv 0$$

sein, und wir erhalten den Satz:

Zu jeder Grösse $\mathfrak{L}(z)$ giebt es zwei Grössen $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{K}'$, die der Bedingung

$$\mathfrak{K}\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}\mathfrak{K}' \equiv \mathfrak{L}$$

genügen.

Nun war

$$G = \mathfrak{G}+x^{-1}\,\mathfrak{G}'+x^{-2}\,\mathfrak{G}''+\cdots .$$

Wir bestimmen $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{K}'$ so, dass das Product

$$(\mathfrak{H}+x^{-1}\,\mathfrak{H}')\,(\mathfrak{K}+x^{-1}\,\mathfrak{K}')$$

bis zur Potenz x^{-1} mit G übereinstimmt. Das erfordert die Congruenz

$$\mathfrak{K}\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}\mathfrak{K}' \equiv \mathfrak{G}',$$

die, wie eben gezeigt, immer zu lösen möglich ist, da der Grad von $\mathfrak{G}'$ in $z < \mu$ ist.

Weiter bestimmen wir zwei Grössen $\mathfrak{H}'', \mathfrak{K}''$ so, dass das Product

$$(\mathfrak{H}+x^{-1}\,\mathfrak{H}'+x^{-2}\,\mathfrak{H}'')\,(\mathfrak{K}+x^{-1}\,\mathfrak{K}'+x^{-2}\,\mathfrak{K}'')$$

bis zur Potenz x^{-2} mit G übereinstimmt. Dazu ist nöthig, dass

$$\mathfrak{K}\mathfrak{H}''+\mathfrak{H}\mathfrak{K}'' \equiv \mathfrak{G}''-\mathfrak{H}'\mathfrak{K}'$$

ist, und das ist immer möglich, da die Grade von $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{K}'$ kleiner als ϱ und σ sind, also der Grad von $\mathfrak{H}'\mathfrak{K}' < \mu$ ist. Die Grade von $\mathfrak{H}''$ und $\mathfrak{K}''$ werden wieder $< \varrho, \sigma$.

So fahren wir fort und gelangen zu dem Ergebniss:

Man kann zwei Functionen

$$H \equiv \mathfrak{H}+x^{-1}\,\mathfrak{H}'+x^{-2}\,\mathfrak{H}''+\cdots,$$
$$K \equiv \mathfrak{K}+x^{-1}\,\mathfrak{K}'+x^{-2}\,\mathfrak{K}''+\cdots$$

so bestimmen, dass ihr Product bis zu einer beliebig tiefen Potenz $x^{-\omega}$ mit G übereinstimmt.

Zerlegen wir H und K in derselben Weise weiter, so erhalten wir den Satz:

Sieht man von einer Function Ω von beliebig tiefem Grade ab, so kann G in ein Product von m Factoren

$$G_1 \dots G_m$$

zerlegt werden.

Ist der Grad von $\mathfrak{G}_i$ in z gleich μ_i, so ist auch der Grad von G_i in z gleich μ_i. Nun multiplicire man G mit $x^{\mu\eta}$, oder was dasselbe ist, jedes G_i mit $x^{\mu_i\eta}$ und setze $z = yx^{-\eta}$; dann ergiebt sich:

Sieht man von einer Grösse Ω von beliebig tiefem Grade ab, so kann

$$F \equiv F_1 \dots F_m$$

gesetzt werden. Die Anzahl m ist die Anzahl der theilerfremden Factoren, in die $\mathfrak{G}$ zerlegt werden konnte.

Diese Darstellung enthält eine angenäherte Zerlegung von F in Factoren und entspricht der Zerlegung einer ganzen Function mit Zahlencoefficienten in reelle Factoren ersten und zweiten Grades. Wenn eines der $\mathfrak{G}_i$ eine Potenz einer irreduciblen Function des Bereichs $[\mathfrak{B}, z]$ ist, so kann mitunter die Zerlegung von G_i nach einem besonderen Verfahren noch bewirkt werden. Auch braucht dann die eingangs angegebene Einschränkung, die in der Existenz der Zahl η liegt, nicht gemacht zu werden. Doch führt die Betrachtung dieses Falles an sich und auch für das Folgende zu erheblichen Weitläufigkeiten, sodass ich mir seine Behandlung für die Zukunft verspare. Im Folgenden werde ich mich sogar auf den Fall beschränken, dass jedes $\mathfrak{G}_i$ selbst irreducibel ist und dass die Anzahl der $\mathfrak{G}_i$ mindestens 2 beträgt.

Ein Beispiel für die Zerlegung möge diesen Abschnitt schliessen.

Es sei $P = 5$; ferner werde die am Schlusse des ersten Abschnittes erwähnte Schreibweise durchgeführt. Es sei

$$F \equiv y^3 + 444y + 444,$$

ausgeschrieben

$$y^3 + (4x^2 + 4x + 4)\, y + (4x^2 + 4x + 4),$$

die vorgelegte irreducible Function. Dann ist die Zahl $\eta = 1$ und

$$F \equiv x^3\, G \equiv x^3\, [z^3 + 4{,}44z + 0{,}444],$$

also

$$\mathfrak{G} \equiv z^3+4z \equiv z\,(z+1)\,(z+4).$$

Nach Ausführung der angegebenen Operationen wird bis auf eine Grösse Ω vom -7-ten Grade

$$F \equiv F_1\,F_2\,F_3,$$

und dabei

$$F_1 \equiv y+\ 1{,}014\,3040,$$
$$F_2 \equiv y+10{,}021\,4433,$$
$$F_3 \equiv y+44{,}020\,3132.$$

3.

Durch die Congruenz $F(y) \equiv 0$ wird im Bereich B ein Körper Y gebildet, für den sich dieselben Ueberlegungen anstellen lassen wie für die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. Man kann also eine Basis $B_1 \ldots B_\mu$ des Körpers Y angeben, vermöge deren sich alle ganzen Grössen C des Körpers linear ausdrücken lassen:

$$C \equiv k_1\,B_1+\cdots+k_\mu\,B_\mu;$$

dabei sind die k ***ganze*** Grössen des Bereichs B. Die Grössen $B_1, \ldots, B_\mu$ lassen sich durch die Potenzen von y ausdrücken:

$$B_i \equiv \frac{1}{b}\,(b_{i0}\,y^{\mu-1}+\cdots+b_{i,\mu-1}).$$

Hier sind wieder die b ganze Grössen des Bereichs B, und der Nenner b ist die Discriminante von F oder einer ihrer Theiler. C erhält dann die Darstellung

$$C \equiv c_0\,y^{\mu-1}+\cdots+c_{\mu-1},$$

wobei nun allerdings die c auch gebrochene Grössen des Bereichs B sein können. Unter der Norm $n(C)$ verstehen wir die Resultante*) zwischen F und C, also

$$n(C) = R\,(F(y), C(y)).$$

Dann ist $n(C)$ immer eine ganze Grösse des Bereichs B. Es sei

$$Gr\,n(C) = \nu.$$

---

*) *Netto*, Algebra 12. Vorlesung. Gl. 4 u. 8.

Wir betrachten von nun an nur solche Functionen F, zu denen mindestens** 2 **theilerfremde und im Bereich** $\mathfrak{B}$ **irreducible Functionen** $\mathfrak{G}_i$ **gehören. Ferner wählen wir den Grad ω hinreichend tief, sodass der Rest Ω bei der Zerlegung

$$F \equiv F_1 F_2 \dots F_m$$

immer vernachlässigt werden darf. m ist also $\geqq 2$, ϱ sei eine der Zahlen $1, \dots, m$ und der Grad von F_ϱ in y sei μ_ϱ. Jedes F_ϱ hat als Coefficienten der Potenzen von y decimale Grössen des Bereichs B. Nun bilden wir zwischen C und den sämmtlichen F_ϱ die Resultanten. Da die F_ϱ angenähert als Theiler von F bezeichnet werden können, sollen diese Resultanten die *Theilnormen* von C heissen. Es ist also

$$n_\varrho(C) \equiv R\left(F_\varrho(y), C(y)\right),$$

und es sei

$$Gr\, n_\varrho(C) = \nu_\varrho.$$

Die n_ϱ sind im allgemeinen decimale Grössen des Bereichs B, sodass die ν_ϱ auch negative ganze Zahlen sein können. Wenn aber auch $n(C)$ nur bis auf eine Grösse Ω mit dem Product $\prod_\varrho n_\varrho(C)$ übereinstimmt, ist doch stets

$$\sum_\varrho \nu_\varrho = \nu.$$

Ersetzen wir nun y durch $x^\eta z$, so gehe $F(y)$ in $\overline{F}(z)$, $F_\varrho(y)$ in $\overline{F}_\varrho(z)$, $C(y)$ in $\overline{C}(z)$ über, und dann ist

$$n(C) \equiv R\left(F(y), C(y)\right) \equiv x^{-\eta(\mu-1)\mu}\, R\left(\overline{F}(z), \overline{C}(z)\right),$$
$$n_\varrho(C) \equiv R\left(F_\varrho(y), C(y)\right) \equiv x^{-\eta(\mu-1)\mu_\varrho}\, R\left(\overline{F}_\varrho(z), \overline{C}(z)\right).$$

Werden die Grössen nach fallenden Potenzen von x geordnet, so kann man schreiben:

$$\overline{F}(z) \equiv x^{\mu\eta}\, \mathfrak{G}(z) + \cdots,$$
$$\overline{F}_\varrho(z) \equiv x^{\mu_\varrho \eta}\, \mathfrak{G}_\varrho(z) + \cdots,$$
$$\overline{C}(z) \equiv x^{\zeta}\, \mathfrak{C}(z) + \cdots.$$

$C(y)$ und $\mathfrak{C}(z)$ müssen zur formalen Bildung der Resultante in y und z als vom Grade $\mu-1$ angesehen werden. Demnach beginnen die Entwickelungen von $n(C)$ und $n_\varrho(C)$ mit

$$x^{-\eta(\mu-1)\mu}\, (x^{\mu\eta})^{\mu-1}\, (x^{\zeta})^{\mu}\, R\left(\mathfrak{G}(z), \mathfrak{C}(z)\right)$$

und

$$x^{-\eta(\mu-1)\mu_\varrho}\,(x^{\mu_\varrho\eta})^{\mu-1}\,(x^{\zeta})^{\mu_\varrho}\,R\,(\mathfrak{G}_\varrho(z),\,\mathfrak{C}(z))$$

oder mit

$$x^{\zeta\mu}\,R\,(\mathfrak{G},\,\mathfrak{C})$$

und

$$x^{\zeta\mu_\varrho}\,R\,(\mathfrak{G}_\varrho,\,\mathfrak{C}).$$

Es ist nun möglich, dass die höchsten Potenzen in einigen der n_ϱ oder in n verschwinden; das kann aber nicht bei allen n_ϱ der Fall sein, weil ja $\mathfrak{C}(z)$ höchstens bis zum Grade $\mu-1$ ansteigt und demnach nicht alle irreduciblen $\mathfrak{G}_\varrho$ als Theiler enthalten kann, denn nur in diesem Falle verschwindet ja die Resultante zwischen $\mathfrak{G}_\varrho$ und $\mathfrak{C}$.

Ueberschreiten also sämmtliche n_ϱ nicht einen bestimmten Grad, so muss die Grösse ζ auch unterhalb einer bestimmten Zahl bleiben, und damit dürfen auch die Coordinaten k von C einen bestimmten Grad nicht überschreiten. Dann giebt es aber nur eine endliche Anzahl von möglichen Systemen der k.

Somit haben wir den Satz:

Es giebt nur eine endliche Anzahl von Grössen C, deren Theilnormengrade eine gewisse obere endliche Grenze nicht überschreiten.

4.

Aus dem vorigen Abschnitt folgt leicht, dass für jede Grösse C

$$\nu \leqq \mu\zeta, \qquad \nu_\varrho \leqq \mu_\varrho\zeta \qquad (\varrho = 1, \ldots, m)$$

ist. Die Theilnormen können aber auch in folgender Weise gebildet werden. Man reducire $C \equiv c_0 y^{\mu-1} + \cdots + c_\mu \bmod F_\varrho(y)$, so bleibt ein Rest

$$C_\varrho(y) \equiv c_{\varrho,0}\,y^{\mu_\varrho-1} + \cdots + c_{\varrho,\mu_\varrho-1}$$

übrig. Und dann ist auch

$$n_\varrho(C) \equiv R(F_\varrho(y), C(y)) \equiv R(F_\varrho(y), C_\varrho(y)) \equiv x^{-\eta\mu_\varrho(\mu_\varrho-1)}\,R(\overline{F}_\varrho(z), \overline{C}_\varrho(z)),$$

und dabei wieder

$$\overline{C}_\varrho(z) = C_\varrho(x^\eta z) = \bar{c}_{\varrho,0}\,z^{\mu_\varrho-1} + \cdots + \bar{c}_{\varrho,\mu_\varrho-1}.$$

Es sei $\overline{C}_\varrho$ nach fallenden Potenzen von x geordnet $= x^{\zeta_\varrho}\,\mathfrak{C}_\varrho(z) + \cdots$, und ζ' sei die grösste unter den Zahlen ζ_ϱ. Dann ist nach der Schlussweise des vorigen Abschnitts sicher *ein* $\nu_\varrho = \mu_\varrho\zeta'$. Für dieses ϱ kann $\mathfrak{C}_\varrho$ nicht ver-

schwinden, also darf auch $\mathfrak{C}$ nicht durch $\mathfrak{G}_\varrho$ theilbar sein. Reducirt man nämlich $C \equiv x^\zeta [\mathfrak{C}+\cdots]$ durch $F_\varrho \equiv x^{\mu_\varrho} [\mathfrak{G}_\varrho + x^{-1}\mathfrak{G}'_\varrho + \cdots]$, so ist zu setzen $\mathfrak{G}_\varrho \equiv -x^{-1}\mathfrak{G}'_\varrho - \cdots$, und wenn $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{G}_\varrho \vartheta + \mathfrak{C}_\varrho$ ist, so folgt dann

$$C \equiv x^\zeta [\mathfrak{C}_\varrho + x^{-1} \ldots].$$

Also muss $\zeta' = \zeta$ sein.

Die Zahl ζ' bedeutete nun den höchsten Grad in den Coefficienten $\bar{c}$. Es möge $Gr\, k \leqq \varkappa$ sein, ferner $Gr\, \frac{b_i}{b} \leqq \beta$, dann ist

$$Gr\, c_i \leqq \varkappa + \beta$$

und

$$Gr\, \bar{c}_i \leqq \varkappa + \beta + (\mu - 1)\eta,$$

also wird

$$\zeta = \varkappa + \beta + (\mu - 1)\eta.$$

Setzen wir noch die nur vom Körper und der gewählten Basis abhängige Zahl

$$(\mu - 1)\eta + \beta = \gamma,$$

so gelten also die 3 Ungleichungen

(1.) $$\nu \leqq \mu\ (\gamma + \varkappa),$$

(2.) $$\nu_\varrho \leqq \mu_\varrho (\gamma + \varkappa),$$

(3.) $$Gr\, \bar{c}_{\varrho j} \leqq \gamma + \varkappa.$$

5.*)

Wir theilen jetzt die m Factoren $F_1, \ldots, F_m$ in zwei Gruppen, die durch die Zeiger σ und τ gekennzeichnet werden sollen, während die Marke ϱ nach wie vor für alle F gilt. In der ersten Gruppe giebt es $r = \sum_\sigma \mu_\sigma$ Grössen $\bar{c}_{\sigma j}$, von denen keine den Grad $\gamma + \varkappa$ übersteigt. Diese r Grössen seien in irgend einer Reihenfolge mit $w_1, \ldots, w_r$ bezeichnet. Zu jeder Grösse C des Körpers gehört also ein System von Grössen w. Die w gehören dem Bereich B an und sollen als decimale Grössen geschrieben sein. Uebersteigen die Coordinaten k von C nicht den Grad $\varkappa$, so giebt es nur $q^{(\varkappa+1)\mu}$ mögliche Werthe von C, da jede Coordinate k nur $q^{\varkappa+1}$ Werthe

*) Man vgl. für das Folgende *Dirichlet-Dedekind*, Vorlesungen über Zahlentheorie, 1879. S. 559 ff.

annehmen kann. Es giebt also auch höchstens $q^{(\varkappa+1)\mu}$ verschiedene Systeme w. Nehmen wir den höchsten Grad $\gamma+\varkappa$ als vorhanden an, und betrachten wir nur die λ ersten Coefficienten der nach fallenden Potenzen von x als decimale Grössen geschriebenen $\bar{c}_{\sigma j}$, so ergeben diese Coefficienten für ein w q^{λ} mögliche Zusammenstellungen, also giebt es für alle Systeme w nur $q^{\lambda r}$ mögliche Zusammenstellungen der λ ersten Coefficienten. Unter den vorhandenen $q^{(\varkappa+1)\mu}$ Systemen w müssen also mindestens 2 dieselben λ ersten Coefficienten haben, sobald

$$q^{(\varkappa+1)\mu} > q^{\lambda r}$$

ist. Das kann aber immer erreicht werden, sobald die Zahl λ der Bedingung

$$(\varkappa+1)\mu > \lambda r > \varkappa\mu$$

gemäss bestimmt wird, und das ist stets möglich, da

$$\frac{(\varkappa+1)\mu}{r} - \frac{\varkappa\mu}{r} = \frac{\mu}{r} > 1$$

ist.

Diese beiden Systeme w mögen mit w' und w'' bezeichnet werden. Zu ihnen gehören die Grössen C' und C''. Die Differenz $C'-C''$ gehört ebenfalls zu den Grössen C, deren Coordinaten den Grad $\varkappa$ nicht übersteigen. Zu ihr gehört das System $w'-w''$, und in diesem System erreichen die einzelnen Grössen höchstens den Grad $\gamma+\varkappa-\lambda$. Also ist:

$$\nu_\sigma \leqq \mu_\sigma(\gamma+\gamma+\varkappa-\lambda),$$

daraus

$$\nu_\sigma < \mu_\sigma\left(\gamma+\gamma+\varkappa-\frac{\varkappa\mu}{r}\right)$$

$$< \mu_\sigma\left(2\gamma+\varkappa-\frac{\varkappa\mu}{r}\right),$$

also erst recht

$$\nu_\sigma < 2\gamma r - \varkappa(\mu-r). \tag{4.}$$

Ferner ist

$$\sum_\sigma \nu_\sigma < \left(2\gamma+\varkappa-\frac{\varkappa\mu}{r}\right)\sum_\sigma \mu_\sigma = r\left(2\gamma+\varkappa-\frac{\varkappa\mu}{r}\right).$$

Hieraus und aus der Ungleichung (2.) folgt:

$$\nu = \Sigma\nu_\sigma + \Sigma\nu_\tau < r\left(2\gamma+\varkappa-\frac{\varkappa\mu}{r}\right)+(\mu-r)(\gamma+\varkappa)$$
$$< \gamma(\mu+r),$$
$$\nu < 2\mu\gamma. \tag{5.}$$

Weiter ist stets $\nu \geqq 0$, also

$$\sum_\tau \nu_\tau \geqq -\sum_\sigma \nu_\sigma > -r\left(2\gamma+\varkappa-\frac{\varkappa\mu}{r}\right).$$

Wird eines der Elemente τ herausgegriffen und die Summe der übrigen durch einen Strich gekennzeichnet, so erhält man:

$$\nu_\tau > -r\left(2\gamma+\varkappa-\frac{\varkappa\mu}{r}\right)-\Sigma'\nu_\tau$$
$$> -r\left(2\gamma+\varkappa-\frac{\varkappa\mu}{r}\right)-(\gamma+\varkappa)(\mu-r-1),$$
$$\nu_\tau > \varkappa-\gamma(\mu+r-1). \tag{6.}$$

Somit erhalten wir:

Unter den Grössen C des Körpers, deren Coordinaten den Grad $\varkappa$ nicht übersteigen, giebt es immer eine, für die die Theilnormengrade der ersten Gruppe

$$\nu_\sigma < 2\gamma r-\varkappa(\mu-r), \tag{4.}$$

die Theilnormengrade der zweiten Gruppe

$$\nu_\tau > \varkappa-\gamma(\mu+r-1) \tag{6.}$$

sind, während der Normengrad von C selbst

$$\nu < 2\mu\gamma \tag{5.}$$

bleibt, wobei γ nur vom Körper abhängt.

Wählt man nun zwei beliebige Zahlen α und β, so kann $\varkappa$ stets so bestimmt werden, dass

$$2\gamma r-\varkappa(\mu-r) < \alpha$$

und

$$\varkappa-\gamma(\mu+r-1) > \beta$$

wird. Demnach haben wir den wichtigen Satz:

Es giebt stets eine Grösse C des Körpers, für die die Zahlen $\nu_\sigma < \alpha$ und die Zahlen $\nu_\tau > \beta$ sind und absolut $\nu < 2\mu\gamma$ bleibt, wobei α und β $(\alpha < \beta)$ ganz beliebige positive und negative ganze Zahlen sein können.

6.

Es sei C_1 so beschaffen, dass $\nu_\sigma(C_1) < \alpha$, $\nu_\tau(C_1) > \beta$, $\nu(C_1) < 2\mu\gamma$ ist; der kleinste Werth aller $\nu_\sigma(C_1)$ sei α_1, der grösste Werth aller $\nu_\tau(C_1)$ sei β_1. Dann giebt es nach dem Satz der vorigen Nummer stets eine Grösse C_2 von der Beschaffenheit, dass

$$\nu_\sigma(C_2) < \alpha_1, \qquad \nu_\tau(C_2) > \beta_1, \qquad \nu(C_2) < 2\mu\gamma$$

ist. So giebt es also eine nie abreissende Kette von Grössen $C_1, C_2, C_3, \ldots$, bei denen die Theilnormengrade der ersten Gruppe immer tiefer sinken, die Theilnormengrade der zweiten Gruppe immer höher steigen, während jedoch der Normengrad selbst zwischen 0 und $2\mu\gamma$ bleibt. Da es nur eine endliche Anzahl von Normen geben kann, deren Grad unter $2\mu\gamma$ liegt, so müssen unendlich viele der C dieselbe Norm n haben, und da die Anzahl der nach n incongruenten Zahlen endlich ist, so müssen unendlich viele unter den C einander nach n congruent sein. So sei z. B.

$$C' \equiv C'' \pmod{n}.$$

Da nun n durch C'' theilbar ist, so ist auch $C' \equiv 0\,(C'')$, also ist

$$C' \equiv C''E,$$

wobei unter E eine ***Einheit*** verstanden wird, d. h. ***eine Grösse des Körpers, deren Normengrad*** 0 ***ist.***

Da ferner

$$n_\varrho(C') \equiv n_\varrho(C'')\, n_\varrho(E),$$

also

$$\nu_\varrho(C') = \nu_\varrho(C'') + \nu_\varrho(E)$$

ist, so folgt aus

$$\nu_\sigma(C') > \nu_\sigma(C''), \qquad \nu_\tau(C') < \nu_\tau(C''),$$

dass

$$\nu_\sigma(E) > 0, \qquad \nu_\tau(E) < 0$$

sein muss. D. h.:

Es giebt im Körper eine Einheit von der Art, dass die Theilnormengrade der ersten Gruppe über 0, ***die Theilnormengrade der zweiten Gruppe unter*** 0 ***liegen.***

7.

Es seien $E_1, E_2, \ldots, E_\lambda, \ldots$ Einheiten, ihre zugehörigen Normengrade $\nu_{\lambda 1}, \nu_{\lambda 2}, \ldots, \nu_{\lambda m}$; dann ist immer

$$\sum_\varrho \nu_{\lambda\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, m).$$

Bildet man aus den Zahlen ν die m-zeilige Matrix $(\nu_{\lambda\varrho})$, so verschwinden alle Determinanten m-ter Ordnung. Nun lassen sich $m-1$ Einheiten so wählen, dass die Determinante

$$\Delta = |\nu_{\lambda s}| \qquad (\lambda, s = 1, \ldots, m-1)$$

von 0 verschieden und positiv ausfällt. Wir übergehen den Beweis, da er sich in nichts von dem entsprechenden ***Dirichlet***s*) unterscheidet. Diese $m-1$ Einheiten $E_1, \ldots, E_{m-1}$ bilden ein System ***unabhängiger Einheiten.*** Alle Einheiten

$$\overline{E} \equiv E_1^{p_1} E_2^{p_2} \ldots E_{m-1}^{p_{m-1}},$$

wobei die p ganze Zahlen sind, bilden eine Gruppe S, und es ist

$$\nu_s(\overline{E}) = \sum_\lambda p_\lambda \nu_{\lambda s}.$$

Nun sei E' irgend eine dem System S nicht angehörige Einheit mit den Theilnormengraden $\nu_s(E')$. Dann lassen sich aus den linearen Gleichungen

$$\sum_\lambda \varepsilon'_\lambda \nu_{\lambda s} = \nu_s(E'),$$

ganze oder gebrochene Zahlen ε' bestimmen, die das ***Exponentensystem der Einheit E' in Bezug auf die unabhängigen Einheiten*** $E_1, \ldots, E_{m-1}$ heissen sollen. Man kann

$$\varepsilon'_\lambda = p_\lambda + \varepsilon_\lambda$$

setzen, wobei p_λ eine ganze Zahl oder 0 und ε_λ ein positiver echter Bruch ist. Dann gehören zur Einheit

$$E = E' E_1^{-p_1} \ldots E_{m-1}^{-p_{m-1}}$$

die Exponenten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{m-1}$, und es ist

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda \nu_{\lambda s} = \nu_s(E).$$

Eine Einheit, deren Exponenten positive echte Brüche sind, soll ***reducirt in Bezug auf das System S*** heissen. Es kann nur eine endliche Anzahl reducirter Einheiten geben; denn lässt man die ε alle möglichen Werthe zwischen 0 und 1 durchlaufen, so werden die Ausdrücke

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda \nu_{\lambda s}$$

bestimmte endliche Werthe nicht überschreiten. Also bleiben die sämmt-

*) a. a. O. S. 562.

lichen Theilnormengrade der reducirten Einheiten unter einer gewissen endlichen Grenze und demnach ist auf Grund des Satzes der No. 3 die Anzahl der reducirten Einheiten endlich.

Folgt man weiter dem *Dirichlet*schen Gedankengang, so schliesst man auf die Existenz eines Systems von ***Fundamentaleinheiten***, ***für die die Determinante Δ ein Minimum*** ist, und für das alle reducirten Einheiten die Exponenten 0 haben. Diese erweisen sich weiter als Einheitswurzeln, d. h. als Wurzeln einer Congruenz $E^r \equiv 1$. Zu ihnen gehören auch die sämmtlichen Grössen des Bereichs $\mathfrak{B}$.

Somit haben wir als Verallgemeinerung des wichtigen *Dirichlet*schen Satzes:

Hat die den Körper Y im Bereich B bestimmende Function $F(y)$ die Eigenschaft, durch eine Transformation $y = x^\eta z$ in $x^{\mu\eta}\mathfrak{G}(z)+x^{\mu\eta-1}\mathfrak{G}'(z)+\cdots$ überzugehen, wobei $\mathfrak{G}(z)$ in m irreducible und verschiedene Factoren mod P zerfällt, dann lässt sich jede Einheit des Körpers in der Form $W E_1^{p_1} \ldots E_{m-1}^{p_{m-1}}$ darstellen, wobei W eine der nur in endlicher Anzahl vorhandenen Einheitswurzeln ist, die der Körper enthält, und $E_1, \ldots, E_{m-1}$ ein System fundamentaler Einheiten bilden. Die p sind dabei ganze Zahlen.

Die in No. 2 betrachtete Function $F \equiv y^3+444\,y+444$ (5) möge auch hier als Beispiel dienen. Ihre Discriminante ist $D(F) \equiv 12.\,14.\,111^2$. Eine Basis des Körpers bilden $1,\ y,\ y^2$; das b der allgemeinen Entwickelung ist also $= 1$; $\beta = 0$. Ein Fundamentalsystem bilden die Einheiten

$$E_1 \equiv y+1, \qquad E_2 \equiv y+10.$$

Ferner ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} \nu_1(E_1), \nu_1(E_2) \\ \nu_2(E_1), \nu_2(E_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nu_{11}, \nu_{21} \\ \nu_{12}, \nu_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2, & 1 \\ 1, & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

Die reducirten Einheiten sind 1, 2, 3, 4.

Sur la convergence des formules d'interpolation de *Lagrange*, de *Gauss*, etc.

(par M. *F. Gomes Teixeira* à Porto, Portugal.)

1. Si l'on connaît les valeurs que prend une fonction $f(x)$ quand on donne à x les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$, on peut former, au moyen de la formule d'interpolation de *Lagrange*, une fonction entière de x qui ait ces mêmes valeurs-là dans les points $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Nous allons nous occuper dans la première partie de ce travail de l'étude des conditions pour que cette fonction tende vers $f(x)$, quand m tend vers l'infini.

Cette question a été considérée par *Hermite* dans un travail important, publié dans ce journal (tome 84, 1878), où l'éminent géomètre a présenté une expression, au moyen d'une intégrale curviligne, du reste de la formule de *Lagrange*, qui l'a conduit à une suite d'inégalités qui sont des conditions suffisantes pour cette convergence. Mais ces conditions ne sont pas nécessaires pour que la fonction déterminée par cette formule-là tende vers $f(x)$, pour $m = \infty$; et, par conséquent, l'étude directe du reste, quand elle est possible, peut conduire à des résultats que les inégalités de *Hermite* ne donnent pas. C'est ce qui arrive, quand $a_1, a_2, a_3, \ldots$ représentent le système des valeurs

$$h \cos \frac{\pi}{2n}, \; h \cos \frac{3\pi}{2n}, \ldots, h \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

dont l'importance dans cette question résulte d'un théorème de *Tchébicheff* bien connu. En étudiant directement, dans ce cas, le reste de la formule rapportée nous avons obtenu les théorèmes énoncés dans les n^s 6 et 7, qui contiennent comme cas très particulier celui qu'on a tiré dans le n° 5 des inégalités de *Hermite*.

Un autre cas, plus général que le précédent, dans lequel l'étude de la convergence de la formule d'interpolation de *Lagrange* nous paraît offrir quelque intérêt est quand $a_1, a_2, a_3, \ldots$ représentent des nombres réels, deux à deux égaux et de signes contraires. Nous le considérons dans le n° 10.

Dans la seconde partie de ce travail nous étudions, en nous plaçant dans le même point de vue, les formules d'interpolation trigonométriques, en considérant une formule donnée par *Gauss* dans son beau et important mémoire sur l'interpolation (*Theoria interpolationis methodo nova tractata; Werke,* t. III, p. 265), une formule analogue indiquée par *Hermite* dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (p. 331), etc. Après quelques remarques générales, nous considérons, en particulier, les fonctions périodiques, en supposant premièrement que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ soient des nombres réels arbitraires, et ensuite qu'ils soient des racines de l'équation $\cos nx = 0$ ou $\sin nx = 0$.

Dans ces études représentent un rôle fondamental les courbes définies par l'équation $|\sin(x-a)| = c$, que nous avons étudiées dans un mémoire publié dans ce journal (t. 116, p. 14), auquel le présent travail est lié par plus d'un rapport. Et, par cela, nous profiterons de cette occasion pour joindre quelques formules à celles y indiquées.

I.

Sur la convergence de la formule d'interpolation de *Lagrange*.

2. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par un contour A et désignons par $x, a_1, a_2, \ldots, a_m$ les affixes de $m+1$ points à l'intérieur de A. En appliquant à l'intégrale

$$(1.) \qquad R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)(x-a_1)^\alpha (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_m)^\lambda}{(z-x)(z-a_1)^\alpha (z-a_2)^\beta \ldots (z-a_m)^\lambda}\, dz$$

le théorème fondamental de la théorie des résidus, *Hermite* a obtenu, dans un article publié dans ce journal (tome 84, 1878), la formule suivante:

$$(2.) \qquad f(x) = \Theta(x) + R(x),$$

où $\Theta(x)$ représente une fonction entière de x, qui satisfait aux conditions suivantes:

$$(3.) \quad \begin{cases} \Theta(a_1) = f(a_1),\ \Theta'(a_1) = f'(a_1),\ \ldots,\ \Theta^{(\alpha-1)}(a_1) = f^{(\alpha-1)}(a_1), \\ \Theta(a_2) = f(a_2),\ \Theta'(a_2) = f'(a_2),\ \ldots,\ \Theta^{(\beta-1)}(a_2) = f^{(\beta-1)}(a_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta(a_m) = f(a_m),\ \Theta'(a_m) = f'(a_m),\ \ldots,\ \Theta^{(\lambda-1)}(a_m) = f^{(\lambda-1)}(a_m). \end{cases}$$

De cette formule il résulte que $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, quand tous ou quelques-uns des nombres $m, \alpha, \beta, \ldots, \lambda$ tendent vers l'infini, si la plus grande valeur que prend l'expression

$$|K(x)| = \left| \frac{(x-a_1)^\alpha (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_m)^\lambda}{(z-a_1)^\alpha (z-a_2)^\beta \ldots (z-a_m)^\lambda} \right|,$$

lorsque z décrit le contour A, tend vers zéro. Cette condition est remplie, comme l'a remarqué l'éminent géomètre, quand on a, pour tout point z du contour,

$$(4.) \qquad \left|\frac{x-a_1}{z-a_1}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{x-a_2}{z-a_2}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{x-a_3}{z-a_3}\right| < \varepsilon, \ldots$$

ε étant une quantité arbitraire, inférieure à l'unité.

Si, étant donné le contour A, on veut chercher l'ensemble des valeurs qu'on doit donner à x pour que $\Theta(x)$ tende vers $f(x)$, ou au moins une partie de cet ensemble, on a besoin d'employer ordinairement les inégalités (4.) à cause de la difficulté de l'étude directe de la condition générale; mais on doit recourir à cette condition toutes les fois que ce soit possible, parce qu'elle peut mener à des conséquences qui ne resultent pas de ces inégalités. Nous allons étudier un cas important où cette circonstance a lieu.

3. Dans l'étude que nous allons faire nous aurons besoin de considérer la courbe représentée par l'équation $|\cos z| = c$, ou $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right| = c$, c étant une constante donnée; or cette courbe ne diffère que par sa position dans le plan de celle dont l'équation est $|\sin z| = c$, étudiée par nous-même dans un travail publié dans le tome 116 (page 14) de ce journal, où nous avons démontré que, si l'on a $c \leqq 1$, cette équation représente une courbe composée d'un nombre infini d'***ovales*** égaux, dont les centres sont les points $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0), \ldots$ et dont les axes sont égaux à $2\arcsin c$ et $2\log(c+\sqrt{c^2+1})$; et que, si l'on a $c > 1$, elle représente une courbe composée de deux branches, symétriquement placées chacune de son côté de l'axe des abscisses, qui s'étendent jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses positives et dans celui des négatives, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale à π, et dans lesquelles l'ordonnée prend une valeur absolue maximum, égale à $\log(c+\sqrt{c^2+1})$, dans les points où les valeurs de l'abscisse sont $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, et une valeur absolue minimum, égale à $\log(c+\sqrt{c^2-1})$, dans les points où les valeurs de l'abscisse sont

$$\pm\frac{1}{2}\pi, \ \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots .$$

La courbe représentée par l'équation $|\cos z| = c$ est donc aussi composée, lorsque $c \leqq 1$, d'un nombre infini d'ovales égaux, dont les centres sont les points $\left(\pm\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\pm\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\pm\frac{5\pi}{2}, 0\right)$, ... et dont les axes sont égaux à $2\arcsin c$ et $2\log(c+\sqrt{c^2+1})$; et, lorsque $c > 1$, de deux branches symétriques par rapport à l'axe des abscisses, qui s'étendent jusqu'à l'infini, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale à π, et dans lesquelles l'ordonnée prend une valeur absolue maximum, égale à $\log(c+\sqrt{c^2+1})$, dans les points où l'abscisse prend les valeurs $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, ..., et une valeur absolue minimum, égale à $\log(c+\sqrt{c^2-1})$, dans les points où l'abscisse prend les valeurs $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

Nous aurons besoin de considérer aussi la courbe définie par l'équation plus générale $|\sin(z-a)| = c$. Elle ne diffère des antérieures que par sa position dans le plan. Les centres des ovales, qu'elle a, quand $c \leqq 1$, sont les points $(a, 0)$, $(a \pm \pi, 0)$, ...; et, quand $c > 1$, l'ordonnée prend une valeur absolue maximum ou minimum dans les points où l'abscisse prend respectivement les valeurs $a, a \pm \pi, a \pm 2\pi, \ldots$ ou les valeurs

$$a \pm \frac{1}{2}\pi, a \pm \frac{3}{2}\pi, a \pm \frac{5}{2}\pi, \ldots,$$

et ses deux branches sont placées symétriquement chacune de son côté de la parallèle à l'axe des abscisses menée par le point d'affixe a.

4. Je vais encore, avant de terminer ces remarques préliminaires, démontrer l'inégalité suivante:

$$|\cos nz| > \frac{1}{2}[(c+\sqrt{c^2-1})^n - (c+\sqrt{c^2-1})^{-n}],$$

où z représente l'affixe d'un point quelconque de la courbe représentée par l'équation $|\cos z| = c$, dans laquelle $c > 1$, que j'aurai besoin d'appliquer bientôt.

Pour cela je déterminerai d'abord la plus petite valeur que prend $|\cos nz|$, quand z décrit la droite représentée par l'équation

$$y = l, \; l = \log(c+\sqrt{c^2-1}),$$

qui passe par les points de la courbe $|\cos z| = c$ où l'ordonnée prend une valeur minimum, et, pour résoudre cette question, je remarque qu'on a, en posant $z = x'+iy'$, $u = |\cos nz|$,

$$u^2 = \cos^2 nx' \left(\frac{e^{ny'}+e^{-ny'}}{2}\right)^2 + \sin^2 nx' \left(\frac{e^{ny'}-e^{-ny'}}{2}\right)^2,$$

et qu'on doit, par conséquent, appliquer la méthode des maxima et minima à la fonction suivante de x':

$$u_1^2 = \cos^2 nx' \left(\frac{e^{nl}+e^{-nl}}{2}\right)^2 + \sin^2 nx' \left(\frac{e^{nl}-e^{-nl}}{2}\right)^2.$$

On trouve de cette manière, en ayant égard aux équations

$$\frac{du_1^2}{dx'} = -n \sin 2nx'$$

et

$$\frac{d^2u_1^2}{dx'^2} = -2n^2 \cos 2nx',$$

que u_1^2 prend une valeur minimum, quand on a

$$x' = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \pm\frac{5\pi}{2n}, \cdots$$

et que cette valeur est égale à

$$\frac{1}{4}[e^{nl}-e^{-nl}]^2.$$

Mais d'un autre côté, comme la dérivée partielle de u^2 par rapport à y':

$$\frac{du^2}{dy'} = \frac{n}{2}(e^{2ny'}-e^{-2ny'})$$

est positive, quand $y' > 0$, on voit que les valeurs que prend u^2, quand on donne à x' une valeur déterminée quelconque, croissent quand y' augmente; et que, par conséquent, la valeur que prend cette fonction dans un point quelconque de la courbe $|\cos z| = c$ est plus grande que celle qu'elle prend dans le point de la droite $y = l$ qui correspond à la même abscisse.

On conclut de tout ce qui précède que, dans tout point z de la courbe $|\cos z| = c$, où $c > 1$, on a l'inégalité

$$u > \frac{1}{2}[e^{nl}-e^{-nl}],$$

qui, en posant $l = \log(c+\sqrt{c^2-1})$, donne celle qu'on voulait démontrer.

Il convient de remarquer encore que la limite inférieure des valeurs de $|\cos nz|$, qu'on vient de déterminer, ne coïncide pas avec la valeur minimum que cette fonction prend, quand z décrit la courbe $|\cos z| = c$. Les ordonnées des points de cette courbe où $|\cos nz|$ devient minimum doivent, en effet, être calculées par l'équation

$$(e^{2ny'}-e^{-2ny'}) \sin 2x' = (e^{2y'}-e^{-2y'}) \sin 2nx',$$

qu'on obtient en appliquant la méthode des maxima et minima à la fonction u^2, en y éliminant d'abord x' au moyen de l'équation

$$(e^{y'}+e^{-y'})^2 = 4\,[c^2+\sin^2 x']$$

de la courbe considérée.

5. Cela posé, nous allons considérer la formule qui résulte de (1.) en y posant $\alpha = 1$, $\beta = 1, \ldots,$ $\lambda = 1$, c'est-à-dire la formule d'interpolation de *Lagrange*:

$$f(x) = \Theta(x)+R(x), \tag{5.}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Theta(x) &= \frac{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_m)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_m)} f(a_1) \\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{m-1})}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\cdots(a_m-a_{m-1})} f(a_m), \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

avec l'expression du reste donnée par *Hermite*

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)(x-a_1)\cdots(x-a_m)}{(z-x)(z-a_1)\cdots(z-a_m)}\,dz, \tag{7.}$$

et, en supposant que le contour A de l'aire dans la quelle la fonction $f(z)$ est holomorphe, soit une circonférence de rayon égal à ϱ, avec le centre dans l'origine des coordonnées, et que $a_1, a_2, \ldots, a_m$ représentent des nombres réels compris entre $-h$ et $+h$, nous allons chercher un ensemble de valeurs de x telles que $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, quand m tend vers l'infini.

En employant premièrement pour ce but les inégalités (4.), nous remarquerons d'abord que les circonférences de rayon égal à $|a|+h$ et ayant leur centre dans le point d'affixe a, qui correspondent aux valeurs que prend a entre les limites $-h$ et $+h$, sont placées dans l'aire limitée par les circonférences C et C', de rayon respectivement égal à h et à ϱ, ayant leur centre dans l'origine des coordonnées, si $\varrho > 3h$. On a donc, pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire limitée par C et pour toutes les valeurs de z représentées par les points de la circonférence C',

$$|x-a| < |a|+h, \qquad |z-a| > \varrho-|a| > \varrho-h,$$

et par conséquent

$$\left|\frac{x-a}{z-a}\right| < \frac{2h}{\varrho-h} < 1.$$

On a donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par la circonférence C', que x représente l'affixe d'un point de l'aire limitée par la circonférence C, et que $a_1, a_2, \ldots$ soient des nombres réels compris entre $-h$ et h, $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, quand le nombre des quantités $a_1, a_2, \ldots$ tend vers l'infini.

Il convient de remarquer qu'on arrive à la même conclusion en supposant que la fonction $f(z)$ soit holomorphe seulement dans la partie de l'aire du cercle C' qui coïncide avec les aires des cercles de rayon égal à $2h$ avec leur centre dans les points $(h, 0)$ et $(-h, 0)$.

6. Les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ qui entrent dans la doctrine antérieure peuvent être choisis d'une manière arbitraire. Il convient donc qu'on leur donne des valeurs telles que $\Theta(x)$ tende le plus rapidement possible vers $f(x)$. Nous leur donnerons donc les valeurs

$$(8.) \qquad h\cos\frac{\pi}{2n},\ h\cos\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ h\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

qui sont celles qui satisfont à cette condition, comme ***Tchébicheff*** l'a fait voir.

En posant alors

$$x = h\cos x_1, \qquad P(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_m),$$

on trouve

$$P(x) = h^n\left(\cos x_1 - \cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos x_1 - \cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(\cos x_1 - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$= h^n\left(\cos^2 x_1 - \cos^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos^2 x_1 - \cos^2\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(\cos^2 x_1 - \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$= h^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} - x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} - x_1\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} - x_1\right)$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi}{2n} + x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} + x_1\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} - x_1\right),$$

quand n est un nombre ***pair***, et

$$P(x) = h^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} - x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} - x_1\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n} - x_1\right)$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi}{2n} + x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} + x_1\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n} + x_1\right)$$

$$\times \sin\left(\frac{n\pi}{2n} - x_1\right),$$

quand n est un nombre ***impair***. Et de ces formules et des suivantes, données par ***Euler*** dans son ***Introductio in Analysin infinitorum:***

$$\text{(A.)}\quad \begin{cases} \cos nx_1 = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} - x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} - x_1\right)\cdots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} - x_1\right) \\ \qquad \times \sin\left(\frac{\pi}{2n} + x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} + x_1\right)\cdots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} + x_1\right), \end{cases}$$

si n est un nombre pair, et

$$\text{(B.)}\quad \begin{cases} \cos nx_1 = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} - x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} - x_1\right)\cdots \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n} - x_1\right) \\ \qquad \times \sin\left(\frac{\pi}{2n} + x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} + x_1\right)\cdots \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n} + x_1\right) \\ \qquad \times \sin\left(\frac{n\pi}{2n} - x_1\right), \end{cases}$$

si n est un nombre impair, il résulte

$$P(x) = \frac{h^n}{2^{n-1}} \cos nx_1.$$

En posant maintenant

$$z = h \cos z_1,$$

on trouve aussi

$$P(z) = \frac{h^n}{2^{n-1}} \cos nz_1.$$

L'expression du reste $R(x)$ prend donc la forme

$$\text{(9.)}\qquad R(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_A \frac{f(z)\cos nx_1}{(z-x)\cos nz_1}\, dz,$$

et elle fait voir que la condition générale pour que $R(x)$ tende vers zéro, pour $n = \infty$, est que la plus grande valeur que prend l'expression

$$\left|\frac{\cos nx_1}{\cos nz_1}\right|,$$

quand le point dont z est l'affixe décrit la circonférence A, tende vers zéro, pour $n = \infty$.

Pour étudier cette condition il nous faut chercher la courbe que décrit le point dont l'affixe est z_1, quand le point dont l'affixe est z décrit la circonférence A. Or, comme l'équation de cette circonférence est $|z| = \varrho$, on voit que l'équation de la courbe demandée est

$$|\cos z_1| = \frac{\varrho}{h}.$$

Nous trouvons ainsi la courbe considérée dans le n° 3, où on a vu qu'elle est fermée et coupe l'axe des abscisses, quand $\varrho \gtreqless h$, et qu'elle est

ouverte et ne coupe pas cet axe, quand $\varrho > h$. Dans le premier cas, les valeurs de z_1 qui correspondent aux points où la courbe coupe l'axe des abscisses sont réelles, et dans ces points on a $|\cos n z_1| \geqq 1$, quelque grand que soit n; dans le second cas, la plus petite valeur que prend $|\cos n z_1|$, quand z_1 décrit la courbe considérée, tend (n° 4) vers l'infini, pour $n = \infty$.

D'un autre côté, si l'on suppose que x soit une quantité réelle, comprise entre $-h$ et h, x_1 est aussi une quantité réelle, comprise entre 0 et π, et on a $|\cos n x_1| < 1$.

De tout ce qui précède il résulte que la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\cos n x_1}{\cos n z_1}\right|$, quand z décrit le contour A, tend vers zéro, pour $n = \infty$, si x est un nombre réel, compris entre $-h$ et h; et que, par conséquent, on a, pour ces valeurs de x,

$$\lim_{n=\infty} R(x) = 0.$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par une circonférence de rayon égal à ϱ ayant son centre dans l'origine des coordonnées et que x soit une quantité réelle comprise entre $-h$ et h, et $\varrho > h$, la valeur que prend $\Theta(x)$, quand on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs (8.), tend vers $f(x)$, quand n tend vers l'infini.

En comparant ce résultat à celui qu'on a obtenu dans le n° 5 et en considérant seulement les valeurs réelles de x, on voit que dans le théorème qu'on vient de démontrer on fixe à ces valeurs les limites $(-\varrho, \varrho)$, moins étroites que celles $\left(-\frac{1}{3}\varrho, \frac{1}{3}\varrho\right)$ qu'on avait été obligé à leur fixer en faisant usage des inégalités (4.).

7. On peut généraliser facilement la doctrine qui précède en l'étendant aux valeurs complexes de x, comme on va voir.

On a, en effet, en posant $x_1 = \alpha + i\beta$,

$$|\cos n x_1|^2 = \cos^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{2}\right)^2 + \sin^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{2}\right)^2$$

et (n° 4)

$$|\cos n z_1| > \frac{1}{2}(e^{nl} - e^{-nl}),$$

où

$$l = \log (c + \sqrt{c^2 - 1}) = \log \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - h^2}}{h},$$

z_1 étant l'affixe d'un point quelconque de la courbe $|\cos z_1| = c$; et, par conséquent,

$$\left|\frac{\cos n x_1}{\cos n z_1}\right|^2 < \cos^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}}\right)^2 + \sin^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}}\right)^2.$$

Mais

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}} = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}} = 0,$$

lorsque $|\beta| < l$.

Donc la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\cos n x_1}{\cos n z_1}\right|$, quand z_1 décrit la courbe $|\cos z_1| = c$, tend vers zéro, pour $n = \infty$.

Il résulte de ce qui précède qu'on a

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \Theta(x),$$

quand

$$|\beta| < \log \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - h^2}}{h}.$$

Considérons, en particulier, les valeurs de x qui sont les affixes des points de la circonférence de rayon ϱ_1 ayant son centre dans l'origine des coordonnées, et soit $\varrho_1 < \varrho$. Les valeurs correspondantes de x_1 sont représentées par les points de la courbe $|\cos x_1| = \frac{\varrho_1}{h} = c_1$, et, par conséquent, pour qu'on ait, pour toutes ces valeurs de x, $\lim_{n=\infty} \Theta(x) = f(x)$, il suffit que cette courbe-ci soit à l'intérieur de la bande limitée par les droites $y = -l$ et $y = l$. Or, comme la plus grande valeur absolue des ordonnées de la courbe $|\cos x_1| = c_1$ est égale à $\log (c_1 + \sqrt{c_1^2 + 1})$, la condition énoncée est remplie quand

$$\log (\varrho_1 + \sqrt{\varrho_1^2 + h^2}) < \log (\varrho + \sqrt{\varrho^2 - h^2})$$

ou, par conséquent,

$$\varrho_1 + \sqrt{\varrho_1^2 + h^2} < \varrho + \sqrt{\varrho^2 - h^2}.$$

Il résulte de cette inégalité la suivante:

$$\varrho^2 > \varrho_1^2 + h^2,$$

et nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'intérieur de la circonférence de rayon égal à ϱ, ayant le centre dans l'origine des coordonnées, et que x soit l'affixe d'un point de l'aire du cercle de rayon égal à ϱ_1 ayant le centre dans le même point, et si est $\varrho^2 > \varrho_1^2 + h^2$, la fonction $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.

Ce théorème contient comme cas particulier celui qui résulte du théorème obtenu dans le n° 5 en y donnant à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs (8.), lequel correspond au cas où $\varrho_1 = h$ et $\varrho > 3h$.

8. Nous allons nous occuper maintenant de la détermination du degré d'approximation avec laquelle le polynôme $\Theta(x)$, correspondant à une valeur de n donnée, représente la fonction $f(x)$, en continuant à supposer que $f(x)$ soit holomorphe dans l'aire limitée par la circonférence de rayon ϱ ayant son centre dans l'origine des coordonnées, que x soit un nombre réel compris entre $-h$ et h, et que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ représentent les nombres (8.).

Pour étudier cette question nous partirons de la formule

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_A \frac{f(z) \cos n x_1}{(z - x) \cos n z_1} dz,$$

qui donne, en représentant par M un nombre égal ou supérieur à la plus grande valeur que prend $|f(z)|$, quand z décrit la circonférence A, et par B un nombre égal ou inférieur à la plus petite valeur que prend $|\cos n z_1|$, quand z décrit la même circonférence (et par conséquent z_1 la courbe $|\cos z_1| = c$), et en remarquant que $|z - x| \geqq \varrho - |x|$,

$$(10.) \qquad R(x) < \frac{\varrho M |\cos n x_1|}{B(\varrho - |x|)}.$$

Or on a déjà vu que

$$|\cos n z_1| > \frac{1}{2}[(c + \sqrt{c^2 - 1})^n - (c + \sqrt{c^2 - 1})^{-n}],$$

et on peut donc poser

$$B = \frac{1}{2}[(c + \sqrt{c^2 - 1})^n - (c + \sqrt{c^2 - 1})^{-n}].$$

L'expression (10.) de la limite de l'erreur qui résulte, quand on prend pour valeur de $f(x)$ la valeur de $\Theta(x)$, correspondante à un nombre n donné, depend de x. On en tire la suivante, indépendante de cette variable, applicable à tout l'intervalle $(-h, +h)$:

$$(11.) \qquad |R(x)| < \frac{\varrho M}{(\varrho - h) B}.$$

On peut obtenir d'une manière facile la valeur qu'on doit attribuer à n pour que $|R(x)|$ soit inférieur à un nombre donné d'avance δ. Il suffit, en effet, de satisfaire à l'inégalité

$$\frac{\varrho M}{(\varrho - h) B} < \delta,$$

qui donne, en posant $\frac{\varrho M}{(\varrho - h)\delta} = u$,

$$(c + \sqrt{c^2 - 1})^{2n} - 1 > 2u (c + \sqrt{c^2 - 1})^n,$$

et, par conséquent,

$$(c + \sqrt{c^2 - 1})^n > u + \sqrt{u^2 + 1},$$

ou

$$n > \frac{\log (u + \sqrt{u^2 + 1})}{\log (c + \sqrt{c^2 - 1})}.$$

On obtient donc le nombre demandé en cherchant le plus petit entier qui satisfait à cette inégalité.

La doctrine qui précède est applicable à l'évaluation approchée des intégrales définies. On a, en effet, en représentant par a et b deux nombres compris entre $-h$ et h,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Theta(x)\,dx + \int_a^b R(x)\,dx,$$

et, en supposant $b > a$,

$$\left| \int_a^b R(x)\,dx \right| < \frac{\varrho M (b-a)}{(\varrho - h) B}; \quad \lim_{n=\infty} B = \infty.$$

Donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b \Theta(x)\,dx.$$

L'erreur qui résulte, quand on prend le nombre $\int_a^b \Theta(x)\,dx$, correspondant à une valeur de n donnée, pour valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$, est inférieure à

$$\frac{\varrho M (b-a)}{B (\varrho - h)}.$$

Si l'on veut déterminer la valeur qu'on doit attribuer à n pour que cette erreur soit inférieure à un nombre donné δ, ou peut recourir à l'inégalité

$$n > \frac{\log(u_1 + \sqrt{u_1^2+1})}{\log(c+\sqrt{c^2-1})},$$

où

$$u_1 = \frac{\varrho M(b-a)}{(\varrho-h)\delta} = u(b-a).$$

Le plus petit entier qui lui satisfait est le nombre demandé.

9. La doctrine qui précède peut être étendue au cas où la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par une circonférence de rayon ϱ ayant le centre dans le point $(a, 0)$, et où x représente un nombre réel, compris entre $a-h$ et $a+h$, et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ représentent les nombres

$$a+h\cos\frac{\pi}{2n}, \quad a+h\cos\frac{3\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad a+h\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

En posant, en effet, $x = x'+a$, on voit que $f(x'+a)$ est une fonction de x' holomorphe dans l'aire limitée par la circonférence de rayon ϱ ayant son centre dans l'origine des coordonnées, et qui prend les valeurs $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$, quand on donne à x' les valeurs

$$h\cos\frac{\pi}{2n}, \; h\cos\frac{3\pi}{2n}, \ldots, \; h\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

On a donc, quand les conditions indiquées aux n° 5, 6 et 7 sont remplies

$$f(x'+a) = \lim_{n=\infty} \Theta(x')$$

et, par conséquent,

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \Theta(x-a).$$

10. Voici encore un autre cas où la condition générale pour la convergence de la formule d'interpolation de ***Lagrange,*** considérée dans le n° 5, conduit à des résultats, qui nous paraissent offrir quelque intérêt, et qu'on ne peut pas tirer des inégalités (4.).

Supposons que les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ soient encore réels et, deux à deux, égaux et de signes contraires, et qu'ils soient compris entre $-h$ et h. Supposons aussi que la fonction $f(x)$ soit, comme dans le n° 6, holomorphe dans l'aire limitée par une circonférence de rayon ϱ ayant son centre dans l'origine des coordonnées.

La condition pour que $\Theta(x)$ tende vers $f(x)$, pour $m = \infty$, est alors que la plus grande valeur que prend

$$\left|\frac{(x^2-a_1^2)(x^2-a_2^2)\cdots(x^2-a_v^2)}{(z^2-a_1^2)(z^2-a_2^2)\cdots(z^2-a_v^2)}\right|,$$

où $v = \frac{1}{2}m$, quand z décrit la circonférence considérée, tende vers zéro, pour $v = \infty$; et ce sont des conditions suffisantes, pour cette convergence qu'on ait

$$\left|\frac{x^2-a_1^2}{z^2-a_1^2}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{x^2-a_2^2}{z^2-a_2^2}\right| < \varepsilon, \quad \ldots$$

ε étant une quantité positive arbitraire, inférieure à l'unité. Nous allons étudier ces conditions-ci.

Soit a un nombre réel quelconque, compris entre $-h$ et h, et considérons la *cassinique* définie par l'équation

$$|z^2-a^2| = c^2,$$

c étant une constante, ou, en posant $z = x'+iy'$,

$$[(x'-a)^2+y'^2][(x'+a)^2+y'^2] = c^4,$$

laquelle, lorsqu'on suppose $c > a$, est composée d'un seul *ovale,* lequel coupe l'axe des abscisses dans les points $[\pm\sqrt{a^2+c^2}, 0]$ et celui des ordonnées dans les points $[0, \pm\sqrt{c^2-a^2}]$.

Quand a varie depuis 0 jusqu'à h, et c^2 varie aussi de manière qu'il soit toujours $a^2+c^2 = h_1^2$, h_1^2 étant un nombre donné, qui ne soit pas inférieur à $2h^2$, les ovales résultants coupent tous l'axe des abscisses dans les mêmes points, ne se coupent pas en d'autres points réels, et varient de manière que celui qui correspond à une valeur déterminée de a contient à l'intérieur ceux qui correspondent aux valeurs supérieures à a; et tous ces ovales sont placés à l'intérieur de la circonférence représentée par l'équation

$$x'^2+y'^2 = h_1^2,$$

qui est l'ovale correspondant à $a = 0$.

Cela posé, si x représente l'affixe d'un point de l'intérieur de l'ovale suivant, qui correspond à $a = h$:

$$(C.) \qquad |z^2-h^2| = h_1^2-h^2,$$

ce point est alors à l'intérieur de tous les ovales considérés, et on a donc

$$|x^2-a^2| < h_1^2-a^2 < h_1^2.$$

D'un autre côté, on trouve au moyen de l'expression

$$|z^2-a^2|^2 = (x'^2+y'^2)^2+2a^2(x'^2+y'^2)-4a^2x'^2+a^4,$$

que la plus petite valeur que prend $|z^2-a^2|$, quand z décrit la circonférence

$$x'^2+y'^2 = \varrho^2,$$

où $\varrho > h_1$, est égale à ϱ^2-a^2.

Nous avons donc, pour tout point z de la circonférence considérée,

$$|z^2-a^2| > \varrho^2-a^2 > \varrho^2-h^2,$$

et par conséquent

$$\left|\frac{x^2-a^2}{z^2-a^2}\right| < \frac{h_1^2}{\varrho^2-h^2}.$$

En remplaçant maintenant a par les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et en supposant

$$\varrho^2 > h^2+h_1^2,$$

on trouve les inégalités suivantes:

$$\left|\frac{x^2-a_1^2}{z^2-a_1^2}\right| < \frac{h_1^2}{\varrho^2-h^2} < 1, \quad \left|\frac{x^2-a_2^2}{z^2-a_2^2}\right| < \frac{h_1^2}{\varrho^2-h^2} < 1, \ldots,$$

au moyen desquelles on voit qu'alors on a

$$f(x) = \lim \Theta(x).$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le cercle de rayon égal à ϱ, ayant son centre dans l'origine des coordonnées; si $a_1, a_2, a_3, \ldots$, sont des nombres réels, compris entre $-h$ et h, deux à deux égaux et de signes contraires; et si x représente l'affixe d'un point de l'intérieur de l'ovale de Cassini (C.), $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, pour $v = \infty$, quand on a

$$h_1 > h\sqrt{2}, \quad \varrho > \sqrt{h^2+h_1^2}.$$

Si, en particulier, x est un nombre réel, compris entre $-h\sqrt{2}$ et $h\sqrt{2}$, et $\varrho > h\sqrt{3}$, $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, quand v tend vers l'infini.

De ce qui précède et de (10.) on tire encore les inégalités suivantes, lorsque x est réel:

$$|R(x)| < \frac{M\varrho}{\varrho-x}\left(\frac{h_1^2}{\varrho^2-h^2}\right)^v < \frac{M\varrho}{\varrho-h_1}\cdot\frac{h_1^{2v}}{(\varrho^2-h^2)^v},$$

dont on le même usage que des inégalités analogues considérées dans le n° 8.

11. Nous terminerons la première partie de ce travail en étendant la formule (2.), qui a été le point de départ des recherches précédentes aux fonctions qui admettent des pôles ou des points singuliers essentiels, en nombre fini, à l'intérieur du contour A.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ces points. On sait qu'il existe alors k développements respectivement ordonnés suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-b_1}, \frac{1}{x-b_2}, \ldots, \frac{1}{x-b_k}$, que nous désignerons, suivant l'usage, par

$$G_1\left(\frac{1}{x-b_1}\right),\ G_2\left(\frac{1}{x-b_2}\right), \ldots,\ G_k\left(\frac{1}{x-b_k}\right),$$

tels que la fonction $F(x)$ définie par l'égalité

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{i=k} G_i\left(\frac{1}{x-b_i}\right)$$

est holomorphe dans l'aire considérée. Donc on peut lui appliquer la formule (2.), et il vient

$$F(x) = \Pi(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{F(z)\,(x-a_1)^\alpha\,(x-a_2)^\beta \ldots (x-a_m)^\lambda}{(z-x)\,(z-a_1)^\alpha\,(z-a_2)^\beta \ldots (z-a_m)^\lambda}\,dz,$$

où $\Pi(x)$ représente une fonction entière de x, qui satisfait aux conditions

$$\Pi(a_1) = F(a_1),\ \Pi'(a_1) = F'(a_1),\ \ldots,\ \Pi^{(\alpha-1)}(a_1) = F^{(\alpha-1)}(a_1),$$

. . . . . .

$$\Pi(a_m) = F(a_m),\ \Pi'(a_m) = F'(a_m),\ \ldots,\ \Pi^{(\lambda-1)}(a_m) = F^{(\lambda-1)}(a_m),$$

où $F(a_1), F(a_2), \ldots, F'(a_1), F'(a_2), \ldots$ sont des nombres qui dépendent des valeurs que prennent $f(x)$ et ses dérivées dans les points $a_1, a_2, \ldots$.

Mais on a, en posant $P(x) = (x-a_1)^\alpha \ldots (x-a_m)^\lambda$,

$$\int_A \frac{F(z)\,P(x)}{(z-x)\,P(z)}\,dz = \int_A \frac{f(z)\,P(x)}{(z-x)\,P(z)}\,dz - \sum_{i=1}^{i=k}\int_A \frac{G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right)P(x)}{(z-x)\,P(z)}\,dz,$$

et, à cause de l'égalité

$$G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right) = \frac{A_1^{(i)}}{(z-b_i)} + \frac{A_2^{(i)}}{(z-b_i)^2} + \frac{A_3^{(i)}}{(z-b_i)^3} + \cdots,$$

on a aussi

$$\int_A \frac{G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right)P(x)}{(z-x)\,P(z)}\,dz = \sum_{s=1}^{\infty}\int_A \frac{A_s^{(i)}\,P(x)}{(z-x)\,(z-b_i)^s\,P(z)}\,dz.$$

Or dans cette formule il entre l'intégrale de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(z-x)\,(z-b_i)^s\,(z-a_1)^\alpha \dots (z-a_m)^\lambda},$$

et il suffit qu'on remarque que le degré de son numérateur est égal à 0 et que celui de son dénominateur est supérieur à 2 pour conclure, en employant un théorème bien connu, qu'on a

$$\int_A \frac{G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right) P(x)}{(z-x)\,P(z)}\,dz = 0.$$

Nous avons donc la formule suivante:

$$f(x) = \Pi(x) + \sum_{i=1}^{i=k} G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right) + \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\,P(x)}{(z-x)\,P(z)}\,dz,$$

qu'on voulait démontrer.

II.

Sur la convergence des formules d'interpolation trigonométriques.

12. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par une courbe fermée A, et supposons que cette courbe soit enfermée dans la bande comprise entre les droites parallèles à l'axe des ordonnées dont les abscisses sont égales à $-\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi$, et qu'elle contienne à l'intérieur les points d'affixe $x, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Alors la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\dots\sin(x-a_m)}{\sin(z-x)\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\dots\sin(z-a_m)}$$

a, dans l'aire considérée, les pôles $x, a_1, a_2, \dots, a_m$; et, en appliquant donc à l'intégrale

$$(12.)\qquad R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A F(z)\,dz$$

le théorème fondamental de la théorie des résidus, on trouve la formule

$$(13.)\qquad f(x) = \Psi(x) + R(x),$$

où

$$(14.)\quad \begin{cases} \Psi(x) = \dfrac{\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)\dots\sin(x-a_m)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\dots\sin(a_1-a_m)}\,f(a_1) \\ \qquad + \dfrac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\dots\sin(x-a_m)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\dots\sin(a_2-a_m)}\,f(a_2) \\ \qquad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad + \dfrac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\dots\sin(x-a_{m-1})}{\sin(a_m-a_1)\sin(a_m-a_2)\dots\sin(a_m-a_{m-1})}\,f(a_m), \end{cases}$$

et on voit que $\Psi(x)$ satisfait aux conditions

$$(15.) \qquad \Psi(a_1) = f(a_1),\ \Psi(a_2) = f(a_2),\ \ldots,\ \Psi(a_m) = f(a_m).$$

Nous venons de trouver ainsi une formule d'interpolation donnée par ***Hermite*** dans son ***Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*** (1873, p. 332) et une expression de son reste au moyen d'une intégrale curviligne, que nous avons déjà indiquée dans une note publiée dans le ***Bulletin des sciences mathématiques*** (2e série, t. XIV), au moyen de laquelle nous étudierons sa convergence. Mais, avant de le faire, nous indiquerons une autre forme qu'on peut donner à l'expression de $\Psi(x)$.

13. Chacun des termes qui entrent dans le second membre de l'égalité (14.) est le produit de $m-1$ facteurs de la forme $p\cos x+q\sin x$; donc $\Psi(x)$ est une fonction homogène de $\sin x$ et $\cos x$ du dégré $m-1$, et elle peut être réduite à la forme suivante:

$$\Psi(x) = L_1\cos^{m-1}x + L_3\cos^{m-3}x + \cdots + [K_1\cos^{m-2}x + K_3\cos^{m-4}x + \cdots]\sin x.$$

En employant maintenant les formules connues

$$2^{s-1}\cos^s x = \cos sx + \binom{s}{1}\cos(s-2)x + \binom{s}{2}\cos(s-4)x + \cdots + \frac{1}{2}\binom{s}{\frac{1}{2}s},$$

si s est pair,

$$2^{s-1}\cos^s x = \cos sx + \binom{s}{1}\cos(s-2)x + \binom{s}{2}\cos(s-4)x + \cdots + \binom{s}{\frac{1}{2}(s-1)}\cos x,$$

si s est impair, et les suivantes, que nous obtenons en dérivant les antérieures par rapport à x,

$$2^{s-1}s\cos^{s-1}x\sin x = s\sin sx + \binom{s}{1}(s-2)\sin(s-2)x + \cdots + \binom{s}{\frac{1}{2}s-1}2\sin 2x,$$

$$2^{s-1}s\cos^{s-1}x\sin x = s\sin sx + \binom{s}{1}(s-2)\sin(s-2)x + \cdots + \binom{s}{\frac{1}{2}(s-1)}\sin x,$$

on trouve

$$(16.) \quad \begin{cases} \Psi(x) = A_{m-1}\cos(m-1)x + A_{m-3}\cos(m-3)x + \cdots + A_1\cos x \\ \qquad + B_{m-1}\sin(m-1)x + B_{m-3}\sin(m-3)x + \cdots + B_1\sin x, \end{cases}$$

si m et un nombre pair, et

$$(17.)\quad \begin{cases} \Psi(x) = A_{m-1}\cos(m-1)\,x + A_{m-3}\cos(m-3)\,x + \cdots + A_2\cos 2x + A_0 \\ \qquad + B_{m-1}\sin(m-1)\,x + B_{m-3}\sin(m-3)\,x + \cdots + B_2\sin 2x, \end{cases}$$

si m est un nombre impair.

Au moyen de l'analyse qui précède on démontre non seulement la possibilité de réduire toujours $\Psi(x)$ aux formes précédentes mais on peut déterminer, en chaque cas particulier, les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ On peut aussi, la possibilité de cette réduction étant établie, déterminer ces coefficients au moyen des équations

$$\Psi(a_1) = f(a_1),\ \Psi(a_2) = f(a_2), \ldots,\ \Psi(a_m) = f(a_m),$$

qui sont du premier degré par rapport à ces quantités.

14. En passant maintenant à étudier la convergence, pour $m = \infty$, de la formule d'interpolation qu'on vient de considérer, ce qui est le principal but que nous avons en vue, nous remarquerons que les formules (12.) et (13.) font voir que la condition générale pour que $\Psi(x)$ tende vers $f(x)$, pour $m = \infty$, est que la plus grande valeur que prend

$$\left|\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\cdots\sin(x-a_m)}{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\cdots\sin(z-a_m)}\right|,$$

quand z décrit le contour A, tende vers zéro; et que, par conséquent, ce sont des conditions suffisantes pour cette convergence qu'on ait, pour les mêmes valeurs de z,

$$(18.)\qquad \left|\frac{\sin(x-a_1)}{\sin(z-a_1)}\right| < \varepsilon,\ \left|\frac{\sin(x-a_2)}{\sin(z-a_2)}\right| < \varepsilon, \ldots,$$

ε étant une quantité arbitraire inférieure à l'unité.

Les considérations qui précèdent nous mènent à poser le problème suivant: le contour A et les points $a_1, a_2, a_3, \ldots$ étant donnés, déterminer l'ensemble des valeurs qu'on doit donner à x pour que $\Psi(x)$ converge vers $f(x)$, quand le nombre de ces points tend vers l'infini, ou, au moins, une partie de cet ensemble; ou, réciproquement, étant données ces valeurs, déterminer A.

On ne peut pas résoudre ce problème d'une manière générale, mais nous allons l'étudier en divers cas qui nous paraissent offrir quelque intérêt.

15. En considérant premièrement un cas qui nous conduit à employer les inégalités (18.), soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des nombres réels compris entre $-h$

et h et β une quantité qui satisfasse aux conditions $3h<\beta<\frac{1}{2}\pi$, et considérons les ***ovales*** représentés par les équations

$$|\sin z| = \sin\beta,\ |\sin z| = \sin h,\ |\sin z| = \sin 3h,$$
$$|\sin(z-a)| = \sin(|a|+h),$$

où a représente une quantité arbitraire comprise entre $-h$ et h, lesquels nous désignerons par L, L', L'' et L_a.

L'ovale L_a est tangent à l'ovale L', et en écrivant leurs équations sous la forme suivant, en posant pour cela $z = x'+iy'$,

$$\cos^2 iy' = \sin^2 h + \cos^2 x',$$
$$\cos^2 iy' = \sin^2(|a|+h) + \cos^2(x'-a),$$

on voit qu'ils n'ont pas d'autres points communs.

On voit de la même manière que l'ovale L_a est tangent à l'ovale L'' et que celui-là est à l'intérieur de celui-ci, quand le paramètre a est égal à $\pm h$.

Quand a varie depuis $-h$ jusqu'à h, l'ovale L_a varie, mais il ne coupe jamais L'', ni par conséquent L, qui est extérieur à L''. Il reste donc à l'intérieur de l'aire limitée par L et L'.

Nous avons donc, en représentant par x l'affixe d'un point quelconque de l'aire limitée par L',

$$|\sin(x-a)| < \sin(|a|+h) < \sin 2h.$$

D'un autre côté l'ovale L et l'ovale représenté par l'équation

$$|\sin(z-a)| = \sin(\beta-|a|)$$

sont tangents et le deuxième est à l'intérieur du premier. Donc on a, pour tout point z de L,

$$|\sin(z-a)| > \sin(\beta-|a|) > \sin(\beta-h).$$

Nous avons donc

$$\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(z-a)}\right| < \frac{\sin 2h}{\sin(\beta-h)} < 1.$$

Comme cette inégalité est remplie quand on donne à a les valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$, on peut énoncer le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par l'ovale L et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont des nombres compris entre $-h$ et h, $\Psi(x)$ tend vers $f(x)$, pour $m = \infty$, quand x est l'affixe d'un point quelconque de l'aire limitée par l'ovale L'.

16. C'est dans le cas des fonctions périodiques que se présentent les plus intéressantes applications de la doctrine du n° 12. Nous allons nous en occuper maintenant.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans la bande infinie comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses, $Y = l$ et $Y = l'$, et supposons que cette fonction soit ***périodique*** et que sa période soit égal à π. Supposons aussi que le nombre des quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ soit ***impair*** et que A représente un rectangle formé par les deux droites précédentes et par les droites, parallèles à l'axe des ordonnées, dont les équations sont $X = -\frac{\pi}{2}$ et $X = \frac{\pi}{2}$.

On a alors

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi}\Big[\int_{-\frac{\pi}{2}+il}^{\frac{\pi}{2}+il} F(z)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}+il}^{\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}+il'}^{-\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz + \int_{-\frac{\pi}{2}+il'}^{-\frac{\pi}{2}+il} F(z)\,dz\Big],$$

et aussi, à cause de la périodicité de la fonction $F(z)$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}+il}^{\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}+il}^{-\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz;$$

et par conséquent

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi}\Big[\int_{-\frac{\pi}{2}+il}^{\frac{\pi}{2}+il} F(z)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}+il'}^{-\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz\Big].$$

On voit au moyen de cette formule que la condition pour que $Y(x)$ tende vers $f(x)$, quand m tend vers l'infini, est que la plus grande valeur que prend

$$\left|\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_m)}{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\ldots\sin(z-a_m)}\right|,$$

quand z décrit les côtés du rectangle A parallèles à l'axe des abscisses, tende vers zéro, et que ce sont des conditions suffisantes pour cette convergence qu'on ait, pour les mêmes valeurs de z,

$$\left|\frac{\sin(x-a_1)}{\sin(z-a_1)}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{\sin(x-a_2)}{\sin(z-a_2)}\right| < \varepsilon, \ldots,$$

ε étant, comme antérieurement, une quantité arbitraire, inférieure à l'unité.

Comme dans ce cas m est un nombre impair, $\Psi(x)$ est déterminée par la formule (14.) ou (17.).

17. Pour faire une première application de ces résultats, considérons la courbe définie par l'équation

$$|\sin(z-a)| = c,$$

et supposons qu'on ait $c > 1$ et que a soit un nombre réel compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Cette courbe est alors composée de deux branches symétriquement placées par rapport à l'axe des abscisses et elle a un nombre infini de points où l'ordonnée est minimum, en valeur absolue, placés sur les droites dont l'équation est

$$Y = \pm \log(c+\sqrt{c^2-1}). \tag{20.}$$

On a donc, pour toute valeur de x comprise entre ces droites,

$$|\sin(x-a)| < c.$$

Considérons aussi la courbe définie par l'équation

$$|\sin(z-a)| = \beta,$$

et soit $\beta > c$. Cette courbe est placée au-dessus de l'antérieure et elle a un nombre infini de points où la valeur absolue de l'ordonnée est maximum, placés sur les droites dont l'équation est

$$Y = \pm \log(\beta+\sqrt{\beta^2+1}). \tag{21.}$$

On a donc, pour toute valeur de z représentée par un point de ces droites,

$$|\sin(z-a)| \overline{\overline{>}} \beta > c.$$

Il vient, par conséquent,

$$\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(z-a)}\right| < \frac{c}{\beta} < 1,$$

et ensuite, en représentant par $a_1, a_2, \ldots$ des nombres réels, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$$\left|\frac{\sin(x-a_1)}{\sin(z-a_1)}\right| < \frac{c}{\beta}, \qquad \left|\frac{\sin(x-a_2)}{\sin(z-a_2)}\right| < \frac{c}{\beta}, \ldots .$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans la bande comprise entre les droites (21.) et que $a_1, a_2, \ldots, a_m$ soient des nombres réels, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$\Psi(x)$ tend vers $f(x)$, pour $m=\infty$, quand x représente l'affixe d'un point de la bande comprise entre les droites (20.).

18. En continuant l'étude du cas que nous venons de considérer et en supposant maintenant que x soit réel, nous allons indiquer une propriété des coefficients qui entrent dans la formule (17.), qu'il convient de remarquer.

Soit M la plus grande valeur que prend $|f(z)|$ quand z décrit les droites qui limitent la bande où cette fonction est holomorphe, et B la plus petite valeur que prend $|\sin(z-x)|$ quand z décrit les mêmes droites et x varie depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. On a, en remarquant que B est différente de zéro,

$$|R(x)| < \frac{M}{B}\left(\frac{c}{\beta}\right)^m.$$

De l'égalité

$$f(x) = \Psi(x) + R(x)$$

et de l'inégalité précédente il résulte

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos kx\,dx = \lim_{m=\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(x)\cos kx\,dx$$

$$= \lim_{m=\infty}\Big[A_{m-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(m-1)x\cos kx\,dx + \cdots + A_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos kx\,dx$$

$$+ B_{m-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(m-1)x\cos kx\,dx + \cdots + B_2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos kx\,dx\Big],$$

où k représente un quelconque des nombres pairs $m-1, m-3, \ldots, 2, 0$.

Mais on a, en représentant par k' un quelconque de ces mêmes nombres,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos kx\cos k'x\,dx = 0, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos kx\sin k'x\,dx = 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 kx\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 kx\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{m=\infty} A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx,$$

$$\lim_{m=\infty} A_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos kx\, dx, \qquad (k > 0).$$

On trouve de la même manière

$$\lim_{m=\infty} B_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin kx\, dx.$$

19. Il est facile de voir que tout ce que nous venons de dire à l'égard du cas où la fonction $f(z)$ a la periode π, a aussi lieu quand cette fonction satisfait à la condition $f(z+\pi) = -f(z)$. Mais alors il faut que le nombre m soit ***pair***, pour que la fonction $F(z)$ ait encore la période π; et, par conséquent, la fonction $\Psi(x)$ est donnée par la formule (16.).

20. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, qu'on choisît d'une manière arbitraire les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Nous allons maintenant considérer quelques nombres particuliers qui conduisent à des conséquences remarquables.

Supposons premièrement que la fonction $f(z)$ admette la période π, que l'axe des abscisses soit à l'intérieur de la bande infinie, limitée par deux droites qui lui sont parallèles, dans laquelle elle est holomorphe, et qu'on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs

$$(22.) \qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2n}, & \frac{3\pi}{2n}, & \frac{5\pi}{2n}, \ldots, & \frac{(n-2)\pi}{2n}, & \frac{n\pi}{2n}, \\ -\frac{\pi}{2n}, & -\frac{3\pi}{2n}, & -\frac{5\pi}{2n}, \ldots & -\frac{(n-2)\pi}{2n}, \end{cases}$$

n étant un nombre ***impair***.

On voit alors, au moyen de la formule (B.) (n° 6.) que

$$\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\cdots\sin(x-a_m)}{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\cdots\sin(z-a_m)} = \frac{\cos nx}{\cos nz},$$

et, par conséquent,

$$(23.) \qquad R(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_A \frac{f(z)\cos nx}{\sin(z-x)\cos nz}\, dz.$$

Il en résulte que la condition pour que $\Psi(x)$ tende vers $f(x)$, quand n tend vers l'infini, est que la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\cos nx}{\cos nz}\right|$, quand z décrit les droites qui limitent la bande considérée, tende vers zéro.

Or, en posant $z = x' + iy'$, on trouve l'identité

$$|\cos nz|^2 = \cos^2 nx' \left(\frac{e^{ny'} + e^{-ny'}}{2}\right)^2 + \sin^2 nx' \left(\frac{e^{ny'} - e^{-ny'}}{2}\right)^2,$$

au moyen de laquelle on voit, en posant premièrement $y' = \pm l$ et en appliquant ensuite la méthode des maxima et minima, que la plus petite valeur que prend $|\cos nz|$, quand z décrit les droites $y' = -l$ et $y' = l$, est égale à

$$\frac{e^{nl} - e^{-nl}}{2},$$

et qu'il tend, par conséquent, vers l'infini, pour $n = \infty$.

D'un autre côté, en posant $x = \alpha + i\beta$ et en ayant égard à l'identité

$$|\cos nx|^2 = \cos^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{2}\right)^2 + \sin^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{2}\right)^2,$$

on trouve

$$\left|\frac{\cos nx}{\cos nz}\right|^2 < \cos^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}}\right)^2 + \sin^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}}\right)^2,$$

quand z représente un point quelconque des droites $y' = l$ et $y' = -l$.

Mais on a, quand $|\beta| < l$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}} = 0.$$

On conclut donc que la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\cos nx}{\cos nz}\right|$, quand z décrit les droites $y' = -l$ et $y' = l$, tend vers zéro, quand $n = \infty$, si le point d'affixe x est à l'intérieur de la bande limitée par ces droites.

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses et équidistantes de cet axe, et périodique, sa période étant égale à π, la fonction $\Psi(x)$, qu'on obtient en donnant en (14.) ou (17.) à $a_1, a_2, \ldots$ les valeurs (22.), tend vers $f(x)$, quand n tend vers l'infini, si x représente un point quelconque à l'intérieur de la bande considérée.

21. La fonction $\Psi(x)$ prend, dans le cas qu'on vient de considérer, deux formes simples qu'on pouvait déduire des formules (14.) et (17.), mais qu'on obtient d'une manière plus facile en partant directement de l'intégrale (23.) et en lui appliquant le théorème fondamental de la théorie des résidus.

En effet, en représentant par a un quelconque des nombres (22.), et par R le résidu de la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)\cos nx}{\sin(z-x)\cos nz}$$

par rapport à son pôle a, on trouve

$$R = \lim_{h=0} \frac{h f(a+h)\cos nx}{\sin(a+h-x)\cos n(a+h)} = -\frac{f(a)\cos nx}{n\sin(a-x)\sin na},$$

et par conséquent

$$\Psi(x) = -\frac{\cos nx}{n} \Sigma \frac{f(a)}{\sin na \sin(x-a)},$$

ou

$$\Psi(x) = -\frac{\cos nx}{n} \Sigma \sin na \frac{f(a)}{\sin(x-a)}, \tag{24.}$$

où a représente les nombres

$$\frac{(2\eta+1)\pi}{2n}, \left(\eta = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\right), -\frac{(2\eta+1)\pi}{2n}\left(\eta = 0, 1, \ldots, \frac{n-3}{2}\right).$$

Ayant obtenu ainsi la première expression de $\Psi(x)$ nous allons en déduire la seconde.

Posons, pour cela, dans l'expression $\frac{\cos nx}{\sin(x-a)}$, qui entre dans la formule qu'on vient de trouver, $e^{ix} = t$ et $e^{ia} = \lambda$. On trouve

$$\frac{\cos nx}{\sin(x-a)} = i\lambda t^{1-n}\frac{t^{2n}+1}{t^2-\lambda^2}$$

$$= i\left[\lambda t^{n-1} + \lambda^3 t^{n-3} + \cdots + \lambda^{2n-3} t^{3-n} + \lambda^{2n-1} t^{1-n}\right] + i\lambda t^{1-n}\frac{\lambda^{2n}+1}{t^2-\lambda^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\cos nx}{\sin(x-a)} = i\left[e^{i[(n-1)x+a]} + e^{i[(n-3)x+3a]} + \cdots + e^{i[(3-n)x+(2n-3)a]} + e^{i[(1-n)x+(2n-1)a]}\right],$$

ou, à cause de l'identité $e^{2nia} = e^{\pm(2\eta+1)i\pi} = -1$,

$$\frac{\cos nx}{\sin(x-a)} = -2\left[\sin((n-1)x+a) + \sin((n-3)x+3a) + \cdots + \sin(2x+(n-2)a) + \frac{1}{2}\sin na\right].$$

On a donc la formule

$$\Psi(x) = \frac{2}{n}\Sigma \sin na\left[\sin((n-1)x+a) + \sin((n-3)x+3a) + \cdots + \sin(2x+(n-2)a) + \frac{\sin na}{2}\right] f(a),$$

ou

$$(25.)\begin{cases} \Psi(x) = A_{n-1}\cos(n-1)x + A_{n-3}\cos(n-3)x + \cdots + A_1\cos 2x + A_0 \\ \qquad + B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-3}\sin(n-3)x + \cdots + B_2\sin 2x, \end{cases}$$

où n est impair, et

$$A_0 = \frac{1}{n}\dot{\Sigma} f(a),$$

$$A_k = \frac{2}{n}\Sigma \sin na\, f(a)\sin(n-k)a = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\cos ka, \qquad (k>0)$$

$$B_k = \frac{2}{n}\Sigma \sin na\, f(a)\cos(n-k)a = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin ka.$$

Ces formules donnent immédiatement les propriétés suivantes des constantes A_k et B_k:

$$\lim_{n=\infty} A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n=\infty} A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$\lim_{n=\infty} B_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin kx\,dx,$$

qui coïncident avec celles qu'on a données dans le n° 18 pour le cas où $a_1, a_2, a_3, \ldots$ représentent des nombres arbitraires, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

22. Soit x une quantité réelle et M_1 et M_2 les plus grandes valeurs que prend $|f(z)|$, quand z décrit les droites qui limitent la bande dans laquelle $f(z)$ est holomorphe. En remarquant que les plus petites valeurs que prennent alors $|\sin(z-x)|$ et $|\cos nz|$ sont égales à

$$\frac{e^{l}-e^{-l}}{2}, \qquad \frac{e^{nl}-e^{-nl}}{2},$$

on trouve l'inégalité

$$|R(x)| < \frac{2(M_1+M_2)|\cos nx|}{(e^{l}-e^{-l})(e^{nl}-e^{-nl})},$$

qui donne une limite supérieure de l'erreur qui resulte, si l'on prend la fonction

$\Psi(x)$, correspondant à une valeur de n donnée, pour valeur approchée de la fonction $f(x)$.

De cette inégalité on tire encore la suivante:

$$|R(x)| < \frac{2(M_1+M_2)}{(e^l-e^{-l})(e^{nl}-e^{-nl})},$$

qui est indépendante de x, et qui peut être employée pour démontrer que. si α et β représentent deux nombres réels, on a

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \Psi(x)\,dx,$$

et que l'erreur qui résulte, si l'on prend $\int_\alpha^\beta \Psi(x)\,dx$ pour valeur de $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ est inférieure à

$$\frac{2(M_1+M_2)\,|\beta-\alpha|}{(e^l-e^{-l})(e^{nl}-e^{-nl})}.$$

On peut déterminer au moyen de l'inégalité

$$n > \frac{\log(v+\sqrt{v^2+1})}{l}, \qquad v = \frac{M_1+M_2}{(e^l-e^{-l})\,\delta},$$

la plus petite valeur qu'on doit donner à n pour que l'erreur qui résulte, si l'on prend $\Psi(x)$ pour valeur de $f(x)$ soit inférieure à δ.

23. Pour faire maintenant une application de la doctrine considérée dans le n° 19, supposons que la fonction $f(x)$ satisfasse à la condition $f(x+\pi) = -f(x)$ et qu'elle soit encore holomorphe dans la bande comprise entre les droites $y=-l$ et $y=l$, et supposons aussi qu'on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs

$$(26.) \qquad \pm\frac{(2\eta+1)\pi}{2n}, \quad \left(\eta = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-2}{2}\right),$$

et que n soit *pair*.

Au moyen de la formule (A.) du n° 6 on voit qu'il est encore

$$R(x) = \int_A F(z)\,dz = \int_A \frac{f(z)\cos nx}{\sin(z-x)\cos nz}\,dz,$$

et que $F(z)$ est périodique, et que sa période est égale à π. On en conclut que le théorème démontré dans le n° 20 a encore lieu, ainsi que la formule (24.).

Mais on doit substituer à la formule (25.) la suivante:

$$\Psi(x) = A_{n-1}\cos(n-1)x + A_{n-3}\cos(n-3)x + \cdots + A_1\cos x$$
$$+ B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-3}\sin(n-3)x + \cdots + B_1\sin x.$$

Les coefficients A_k et B_k de cette formule sont donnés par les mêmes relations que dans le cas antérieur en y substituant a par les valeurs (26.).

24. Nous indiquerons encore un autre système de valeurs de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ qui, quand la fonction $f(x)$ admet la période π, mènent à des résultats convergents. C'est le suivant:

$$a = \frac{\eta\pi}{n}, \quad \left[\eta = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{1}{2}(n-1)\right],$$

n étant un nombre *impair*.

On trouve alors

$$f(x) = \Psi(x) + R(x),$$

où

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin nx\,dz}{\sin(z-x)\sin nz},$$

$$\Psi(x) = \frac{\sin nx}{n}\Sigma(-1)^\eta \frac{f(a)}{\sin(x-a)}, \tag{26.}$$

et on voit au moyen de cette expression de $R(x)$ que $\Psi(x)$ tend vers $f(x)$, pour $n = \infty$, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande limitée par deux droites parallèles à l'axe des abscisses, équidistantes de cet axe, et x est l'affixe d'un point de son intérieur.

On peut réduire l'expression de $\Psi(x)$ à la forme suivante:

$$\Psi(x) = \frac{2}{n}\Sigma(-1)^\eta\left\{\cos[(n-1)x+a] + \cos[(n-3)x+3a]\right.$$
$$\left. + \cdots + \cos[2x+(n-2)a] + \frac{(-1)^\eta}{2}\right\} f(a),$$

ou

$$\Psi(x) = A_{n-1}\cos(n-1)x + A_{n-3}\cos(n-3)x + \cdots + A_2\cos 2x + A_0$$
$$+ B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-3}\sin(n-3)x + \cdots + B_2\sin 2x,$$

où

$$A_0 = \frac{1}{n}\Sigma f(a),$$

$$A_k = \frac{2}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)\cos(n-k)a = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\cos ka, \qquad (k>0)$$

$$B_k = \frac{2}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)\sin(n-k)a = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin ka.$$

25. Si la fonction $f(x)$ satisfait à la condition $f(x+\pi) = -f(x)$ et on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs

$$a = \frac{\eta\pi}{n}, \qquad \left(\eta = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left(\frac{1}{2}n-1\right), \frac{1}{2}n\right)$$

où n est un nombre ***pair***, on trouve, comme dans le cas antérieur, que la fonction $\Psi(x)$, définie par la formule (26.), tend vers $f(x)$, quand $n = \infty$, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande considérée dans le numéro antérieur et x représente un point de son intérieur.

L'expression de $\Psi(x)$ peut être réduite alors à la forme

$$\Psi(x) = \frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta}\{\cos[(n-1)x+a]+\cos[(n-3)x+3a] + \cdots + \cos[x+(n-1)a]\} f(a),$$

ou

$$\Psi(x) = A_{n-1}\cos(n-1)x + A_{n-3}\cos(n-3)x + \cdots + A_1\cos x + B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-3}\sin(n-3)x + \cdots + B_1\sin x,$$

où

$$A_k = \frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta} f(a)\cos(n-k)a = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\cos ka,$$

$$B_k = \frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta} f(a)\sin(n-k)a = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin ka.$$

26. L'intégrale

$$(27.)\quad R_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin\frac{1}{2}(x-a_1)\ldots\sin\frac{1}{2}(x-a_m)}{\sin\frac{1}{2}(z-x)\sin\frac{1}{2}(z-a_1)\ldots\sin\frac{1}{2}(z-a_m)}\,dz$$

conduit à des résultats analogues à ceux qu'on a obtenus au moyen de l'intégrale considérée dans le n° 12.

On trouve, en premier lieu, en supposant que A représente une courbe fermée, placée à l'intérieur de la bande comprise entre les droites $X = -\pi$ et $X = \pi$, et que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ soient les affixes des points donnés placés à l'intérieur de l'aire qu'elle limite:

$$f(x) = \Psi_1(x) + \frac{1}{2}R_1(x),$$

où

$$\Psi_1(x) = \frac{\sin\frac{1}{2}(x-a_2)\sin\frac{1}{2}(x-a_3)\ldots\sin\frac{1}{2}(x-a_m)}{\sin\frac{1}{2}(a_1-a_2)\sin\frac{1}{2}(a_1-a_3)\ldots\sin\frac{1}{2}(a_1-a_m)} f(a_1)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\sin\frac{1}{2}(x-a_1)\sin\frac{1}{2}(x-a_2)\ldots\sin\frac{1}{2}(x-a_{m-1})}{\sin\frac{1}{2}(a_m-a_1)\sin\frac{1}{2}(a_m-a_2)\ldots\sin\frac{1}{2}(a_m-a_{m-1})} f(a_m),$$

ou, en procédant comme dans le n° 13,

$$\Psi_1(x) = A_{m-1}\cos\frac{1}{2}(m-1)x + A_{m-3}\cos\frac{1}{2}(m-3)x + \cdots + A_1\cos\frac{1}{2}x$$

$$+ B_{m-1}\sin\frac{1}{2}(m-1)x + B_{m-3}\sin\frac{1}{2}(m-3)x + \cdots + B_1\sin\frac{1}{2}x,$$

si m est un nombre ***pair***, et

$$\Psi_1(x) = A_{m-1}\cos\frac{1}{2}(m-1)x + A_{m-3}\cos\frac{1}{2}(m-3)x + \cdots + A_0$$

$$+ B_{m-1}\sin\frac{1}{2}(m-1)x + B_{m-3}\sin\frac{1}{2}(m-3)x + \cdots + B_1\sin x,$$

si m est *impair*; et on voit que $\Psi_1(x)$ satisfait aux conditions

$$\Psi_1(a_1) = f(a_1),\ \Psi_1(a_2) = f(a_2), \ldots,\ \Psi_1(a_m) = f(a_m).$$

Nous avons ainsi une formule d'interpolation considérée par *Gauss*, (*Werke*, t. III, p. 281) et une expression du reste au moyen d'une intégrale curviligne, laquelle fait voir qu'une condition pour que $\Psi_1(x)$ tende vers $f(x)$, pour $m = \infty$, est que la plus grande valeur que prend l'expression

$$(28.)\qquad \left|\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a_1)\sin\frac{1}{2}(x-a_2)\ldots\sin\frac{1}{2}(x-a_m)}{\sin\frac{1}{2}(z-a_1)\sin\frac{1}{2}(z-a_2)\ldots\sin\frac{1}{2}(z-a_m)}\right|,$$

quand z décrit le contour A, tende vers zéro et que ce sont des conditions suffisantes pour cette convergence qu'on ait, pour les mêmes valeurs de z,

$$(29.)\qquad \left|\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a_1)}{\sin\frac{1}{2}(z-a_1)}\right| < \varepsilon,\quad \left|\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a_2)}{\sin\frac{1}{2}(z-a_2)}\right| < \varepsilon, \ldots;$$

ε étant une constante arbitraire, inférieure à l'unité.

27. Supposons que la fonction $f(x)$ soit périodique, sa période étant égale à 2π, et qu'elle soit holomorphe dans une bande infinie comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses. On voit alors, comme dans le n° 16, que dans ce cas la condition pour que $\psi_1(x)$ tende vers $f(x)$, pour $m=\infty$, est que la plus grande valeur que prend l'expression (28.), quand z décrit ces droites, tende vers zéro, et que ce sont des conditions suffisantes pour cette convergence que les inégalités (29.) soient remplies par les valeurs que z prend alors.

On voit aussi, en procédant comme dans le n° 17 et en remarquant que l'équation

$$\left|\sin\frac{1}{2}(z-a)\right| = c,$$

représente, quand $c>1$, une courbe composée de deux branches infinies, symétriquement placées par rapport à l'axe des abscisses, ayant un nombre infini de points où l'ordonnée est minimum, en valeur absolue, placés sur les droites représentées par l'équation

$$Y = \pm 2\log(c+\sqrt{c^2-1}), \tag{30.}$$

et que la courbe analogue représentée par l'équation

$$\left|\sin\frac{1}{2}(z-a)\right| = \beta,$$

où $\beta>c>1$, a un nombre infini de points où l'ordonnée est maximum, en valeur absolue, placés sur les droites dont l'équation est

$$Y = \pm 2\log(\beta+\sqrt{\beta^2+1}), \tag{31.}$$

le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande limitée par les droites (31.) et périodique, la période étant égale à 2π; et si $a_1, a_2, a_3, \ldots$, sont des nombres réels, compris entre $-\pi$ et π, et x est l'affixe d'un point à l'intérieur de la bande limitée par les droites (30.), on a

$$\lim_{m=\infty} \Psi_1(x) = f(x).$$

On démontre aussi, comme dans le n° 18, l'inégalité

$$|R(x)| < \frac{M}{B_1}\left(\frac{c}{\beta}\right)^m,$$

où M représente la plus grande valeur que prend $|f(z)|$, quand z décrit les

droites qui limitent la bande où la fonction est holomorphe, et B_1 la plus petite valeur que prend $\left|\sin\frac{1}{2}(z-x)\right|$ quand z décrit les mêmes droites, et ensuite les formules

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{1}{2}kx\,dx = \lim_{m=\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_1(x)\cos\frac{1}{2}kx\,dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{1}{2}kx\,dx = \lim_{m=\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_1(x)\sin\frac{1}{2}kx\,dx.$$

Au moyen de ces formules et des relations

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{k}{2}x\cos\frac{k'}{2}x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{k}{2}x\sin\frac{k'}{2}x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{k}{2}x\cos\frac{k'}{2}x\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\frac{k}{2}x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{k}{2}x\,dx = \pi,$$

où les entiers k et k' sont l'un et l'autre pairs ou l'un et l'autre impairs, on voit que les coefficients de $\Psi_1(x)$ ont, dans le cas considéré, les propriétés exprimées par les relations suivantes:

$$\lim_{m=\infty} A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \lim_{m=\infty} A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad (k>0)$$

$$\lim B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

28. Supposons maintenant qu'on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs

$$(32.) \qquad a = \frac{\eta\pi}{n}, \qquad (\eta = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1), n),$$

et que les équations des droites qui limitent la bande dans laquelle $f(x)$ est holomorphe, soient $Y = -l$ et $Y = l$.

On voit alors au moyen de la formule

$$\sin nx = 2^{2n-1}\prod_{\eta=1}^{n}\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\pi}{n}-x\right)\prod_{\eta=0}^{n-1}\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\pi}{n}+x\right),$$

que l'intégrale (27.) se réduit alors à la forme

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin nx\sin\frac{1}{2}z}{\sin\frac{1}{2}(z-x)\sin\frac{1}{2}x\sin nz}\,dz;$$

et en appliquant directement le théorème fondamental de la théorie des résidus, en prenant pour contour A de l'intégration le rectangle formé par les droites $Y = -l$, $Y = l$, $X = -\pi+\delta$, $X = \pi+\delta$, δ étant une quantité positive assez petite pour que le point $-\frac{(n-1)\pi}{n}$ soit à son intérieur, on trouve

$$f(x) = \Psi_1(x)+\frac{1}{2}R_1(x),$$

où

$$\Psi_1(x) = \frac{\sin nx}{2n\sin\frac{1}{2}x}\Sigma(-1)^\eta \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}(x-a)}f(a).$$

Or, on voit, comme dans le n° 20, que la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\sin nx}{\sin nz}\right|$ quand z décrit les côtés du rectangle considéré, parallèles à l'axe des abscisses, tend vers zéro, pour $n = \infty$. Donc on peut énoncer le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ admet la période 2π et qu'elle soit holomorphe dans la bande infinie comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses et équidistantes de cet axe, et que x soit l'affixe d'un point à l'intérieur de cette bande, on a

$$\lim_{n=\infty}\Psi_1(x) = f(x),$$

quand a représente les nombres (32.).

29. On peut donner à l'expression de $\Psi_1(x)$ une autre forme remarquable.

Considérons l'expression

$$\varphi(x) = \frac{\sin nx}{\sin\frac{1}{2}(x-a)\sin\frac{1}{2}x}$$

dans laquelle nous poserons $e^{\frac{1}{2}ix} = t$, $e^{\frac{1}{2}ia} = \lambda$.

Il vient

$$\varphi(x) = 2i\lambda\frac{(t^{4n}-1)t^{2-2n}}{(t^2-\lambda^2)(t^2-1)}$$

ou

$$\varphi(x) = 2i\lambda t^{2-2n}[t^{4n-4}+(1+\lambda^2)t^{4n-6}+(1+\lambda^2+\lambda^4)t^{4n-8}$$
$$+\cdots+(1+\lambda^2+\cdots+\lambda^{4n-6})t^2+1+\lambda^2+\lambda^4+\cdots+\lambda^{4n-4}],$$

et, par conséquent,

$$\varphi(x) = 2i\left[\lambda t^{2(n-1)} + \lambda\,\frac{\lambda^4-1}{\lambda^2-1}\,t^{2(n-2)} + \lambda\,\frac{\lambda^6-1}{\lambda^2-1}\,t^{2(n-3)}\right.$$
$$\left. + \cdots + \lambda\,\frac{\lambda^{4n-4}-1}{\lambda^2-1}\,t^{-2(n-2)} + \lambda\,\frac{\lambda^{4n-2}-1}{\lambda^2-1}\,t^{-2(n-1)}\right].$$

Mais on trouve, en substituant $e^{\frac{1}{2}ia}$ pour λ et en ayant égard à l'identité $e^{2nia} = 1$,

$$\lambda\,\frac{\lambda^4-1}{\lambda^2-1} = e^{ia}\,\frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}a}, \qquad \lambda\,\frac{\lambda^6-1}{\lambda^2-1} = e^{\frac{3}{2}ia}\,\frac{\sin\frac{3}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}, \cdots$$

$$\lambda\,\frac{\lambda^{4n-6}-1}{\lambda^2-1} = -e^{-\frac{3}{2}ia}\,\frac{\sin\frac{3}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}, \quad \lambda\,\frac{\lambda^{4n-4}-1}{\lambda^2-1} = -e^{-ia}\,\frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}a}, \quad \lambda\,\frac{\lambda^{4n-2}-1}{\lambda^2-1} = -e^{-\frac{1}{2}ia}.$$

Donc

$$\varphi(x) = 2i\left[e^{i\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right]} + \frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}a}\,e^{i[(n-2)x+a]} + \cdots + \frac{\sin\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}\,e^{\frac{1}{2}nia}\right.$$
$$\left. - \frac{\sin\frac{n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}\,e^{-i\left[x+\frac{n-1}{2}a\right]} - \cdots - \frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}a}\,e^{-i[(n-2)x+a]} - e^{-i\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right]}\right],$$

et, par conséquent,

$$\varphi(x) = -4\left[\sin\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right] + \frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}a}\sin\left[(n-2)x+a\right]\right.$$
$$+ \frac{\sin\frac{3}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}\sin\left[(n-3)x+\frac{3}{2}a\right] + \cdots + \frac{\sin\frac{1}{2}(n-1)a}{\sin\frac{1}{2}a}\sin\left[x+\frac{n-1}{2}a\right]$$
$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}\right].$$

On en conclut qu'on peut donner à l'expression de $\Psi_1(x)$ la forme suivante

$$\Psi_1(x) = -\frac{2}{n}\Sigma(-1)^\eta \left\{\sin\frac{1}{2}a \sin\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right]\right.$$
$$+\sin a \sin\left[(n-2)x+a\right]+\sin\frac{3}{2}a \sin\left[(n-3)x+\frac{3}{2}a\right]+\cdots$$
$$\left.+\sin\frac{1}{2}(n-1)a \sin\left[x+\frac{n-1}{2}a\right]+\frac{\sin^2\frac{na}{2}}{2}\right\} f(a),$$

ou

$$\Psi_1(x) = A_{n-1}\cos(n-1)x + A_{n-2}\cos(n-2)x+\cdots+A_1\cos x + A_0$$
$$+ B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-2}\sin(n-2)x+\cdots+B_1\sin x,$$

où

$$A_0 = -\frac{1}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)\sin^2\frac{na}{2} = \frac{1}{n}\Sigma' f(a),$$

Σ' représentant une somme qui se rapporte aux valeurs impaires de η, et

$$A_k = -\frac{2}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)\sin^2\frac{n-k}{2}a = -\frac{1}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)+\frac{1}{n}\Sigma f(a)\cos ka,$$

$$B_k = -\frac{1}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)\sin(n-k)a = \frac{1}{n}\Sigma f(a)\sin ka.$$

Il est facile de démontrer les propriétés suivantes des constantes qu'on vient d'écrire:

$$\lim_{n=\infty} A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n=\infty} A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad (k>0)$$

$$\lim_{n=\infty} B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

30. Dans le cas particulier où $f(x)$ satisfait à la condition

$$f(x) = -f(-x),$$

la formule antérieure se réduit à la suivante:

$$\Psi_1(x) = B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-2}\sin(n-2)x+\cdots+B_1\sin x,$$

et les valeurs des constantes sont données par la formule

$$B_k = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin ka,$$

en y posant

$$a = \frac{\eta\pi}{n}, \qquad (\eta = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

Ce résultat coïncide avec celui qui a été obtenu par ***Lagrange*** dans ses ***Recherches sur la nature et la propagation du son*** au moyen de l'élimination des constantes $B_1, B_2, B_3, \ldots$ entre les équations

$$\Psi_1\left(\frac{\eta\pi}{n}\right) = f\left(\frac{\eta\pi}{n}\right), \qquad (\eta = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

31. Supposons maintenant qu'on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs

$$a_1 = 0, \quad a = \pm\frac{(2\eta+1)\pi}{2n}, \qquad (\eta = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

et que la fonction $f(x)$ soit encore périodique, sa période étant égale à 2π, et qu'elle soit holomorphe dans la bande comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses, équidistantes de cet axe. Alors l'intégrale

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\cos nx \sin\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}(z-x)\sin\frac{1}{2}z\cos nz}\,dz$$

conduit à des résultats analogues à ceux qu'on vient d'obtenir dans les n^{os} précédentes.

Ainsi il vient premièrement

$$f(x) = \Psi_1(x) + \frac{1}{2}R_1(x),$$

où

$$\Psi_1(x) = f(0)\cos nx + \frac{1}{2}\Sigma \sin na \frac{f(a)\cos nx \sin\frac{1}{2}x}{n\sin\frac{1}{2}(a-x)\sin\frac{1}{2}a},$$

et on voit qu'on a

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \Psi_1(x),$$

quand x représente l'affixe d'un point à l'intérieur de la bande dans laquelle $f(x)$ est holomorphe.

On peut voir ensuite, au moyen de l'égalité

$$\frac{\cos nx \sin\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}(a-x)} = \cos\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right]+\cos\left[(n-2)x+\frac{3}{2}a\right]+\cdots$$
$$+\cos\frac{2n-1}{2}a$$
$$-\left\{\cos\left[nx+\frac{1}{2}a\right]+\cos\left[(n-1)x+\frac{3}{2}a\right]+\cdots\right.$$
$$\left.+\cos\left[x+\frac{2n-1}{2}a\right]\right\},$$

que $\Psi_1(x)$ peut être réduite à la forme

$$\Psi_1(x) = A_n\cos nx + A_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+A_1\cos x+A_0$$
$$+B_n\sin nx+B_{n-1}\sin(n-1)x+\cdots+B_1\sin x,$$

où

$$A_0 = \frac{1}{2n}\Sigma f(a),$$

$$A_k = \frac{1}{n}\Sigma\sin na\, f(a)\sin(n-k)a = \frac{1}{n}\Sigma f(a)\cos ka, \qquad (0<k<n)$$

$$B_k = \frac{1}{n}\Sigma\sin na\, f(a)\cos(n-k)a = \frac{1}{n}\Sigma f(a)\sin ka, \qquad (k<n)$$

$$A_n = f(0)-\frac{1}{2n}\Sigma\sin na\, f(a)\cot\frac{1}{2}a,$$

$$B_n = \frac{1}{2n}\Sigma\sin na\, f(a).$$

32. Les résultats donnés dans les n°s 16 à 25 peuvent être étendus au cas où la fonction $f(x)$ satisfait à une des conditions $f(x+\omega)=f(x)$ ou $f(x+\omega)=-f(x)$. On peut, pour cela, partir de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_1)\cdots\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_m)}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-x)\sin\frac{\pi}{\omega}(z-a_1)\cdots\sin\frac{\pi}{\omega}(z-a_m)}\,dz$$

et appliquer les méthodes employées dans ces numéros-là, ou appliquer les théorèmes y obtenus à la fonction $f\left(\frac{X\omega}{\pi}\right)$, qui satisfait alors à la condition

$$f\left[\frac{(X+\pi)\omega}{\pi}\right] = \pm f\left(\frac{X\omega}{\pi}\right),$$

et poser ensuite $x = \frac{X\omega}{\pi}$. Si l'on suit cette voie, il faut chercher le point du plan qui représente x, quand on donne celui qui représente X, et le contour A_1 que décrit le point z, défini par l'égalité $\frac{Z\omega}{\pi} = z$, quand Z décrit le rectangle A. En posant, pour cela,

$$\omega = \beta(\cos\Theta + i\sin\Theta), \quad X = R(\cos\Theta' + i\sin\Theta'), \quad x = r(\cos\tau + i\sin\tau),$$

on trouve

$$r = \frac{\beta R}{\pi}, \quad \tau = \Theta + \Theta',$$

et on en conclut: 1° que, si les coordonnées polaires du point X sont égales à R et Θ', celles du point x sont égales à $\frac{\beta R}{\pi}$ et $\Theta + \Theta'$; 2° qu'aux points de l'axe des abscisses compris entre $-\pi$ et π correspondent les points de la droite (que nous représenterons par D) qui passe par l'origine des coordonnées et fait un angle égal à l'argument de ω avec l'axe des abscisses, compris entre $-\omega$ et ω; 3° que les droites parallèles à l'axe des abscisses menées par les points $(0, \pm l)$ se transforment dans les parallèles à D dont la distance à cette droite est égale à $\frac{l\beta}{\pi}$; 4° que les droites parallèles à l'axe des ordonnées menées par les points $(\pm\pi, 0)$ se transforment dans les perpendiculaires à D qui passent par les points d'affixes $-\omega$ et ω.

On trouve de cette manière les résultats suivants:

1°. Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande limitée par deux droites parallèles à D, et que x représente un point de son intérieur et $\Psi(x)$ la fonction

$$\Psi(x) = \frac{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_2)\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_3)\cdots\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_m)}{\sin\frac{\pi}{\omega}(a_1-a_2)\sin\frac{\pi}{\omega}(a_1-a_3)\cdots\sin\frac{\pi}{\omega}(a_1-a_m)} f(a_1)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_1)\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_2)\cdots\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_{m-1})}{\sin\frac{\pi}{\omega}(a_m-a_1)\sin\frac{\pi}{\omega}(a_m-a_2)\cdots\sin\frac{\pi}{\omega}(a_m-a_{m-1})} f(a_m),$$

on a

$$\lim_{m=\infty} \Psi(x) = f(x),$$

quand la plus grande valeur que prend

$$\left| \frac{\sin \frac{\pi}{\omega}(x-a_1) \dots \sin \frac{\pi}{\omega}(x-a_m)}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-a_1) \dots \sin \frac{\pi}{\omega}(z-a_m)} \right|$$

dans les droites qui limitent la bande tend vers zéro, pour $m = \infty$. Nous supposons que $a_1, a_2, a_3, \dots$ soient représentés par des points de l'intérieur du rectangle A_1, dans lequel se transforme A.

L'expression de $\Psi(x)$ peut être réduite à la forme

$$\Psi(x) = A_{m-1} \cos (m-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{m-3} \cos (m-3)\frac{\pi x}{\omega} + \dots + A_1 \cos \frac{\pi x}{\omega}$$
$$+ B_{m-1} \sin (m-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{m-3} \sin (m-3)\frac{\pi x}{\omega} + \dots + B_1 \sin \frac{\pi x}{\omega},$$

où m est pair, si $f(x+\omega) = -f(x)$, ou

$$\Psi(x) = A_{m-1} \cos (m-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{m-3} \cos (m-3)\frac{\pi x}{\omega} + \dots + A_0$$
$$+ B_{m-1} \sin (m-1)\frac{\pi x}{\omega} + B_{m-3} \sin (m-3)\frac{\pi x}{\omega} + \dots + B_2 \sin \frac{2\pi x}{\omega}$$

où m est impair, si $f(x+\omega) = f(x)$.

2°. Si, en particulier, $f(x)$ est holomorphe dans la bande limitée par deux parallèles à D, dont la distance à cette droite soit supérieure à $\frac{l\beta}{\pi} \log (c+\sqrt{c^2+1})$, c étant un nombre quelconque plus grand que l'unité, et si x représente l'affixe d'un point à l'intérieur de la bande limitée par deux parallèles à D, dont la distance à la même droite soit égale à $\frac{l\beta}{\pi} \log (c+\sqrt{c^2-1})$, $\Psi(x)$ tend vers $f(x)$, pour $m = \infty$.

3°. Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande comprise entre deux droites parallèles à D et équidistantes de cette droite, et si x représente l'affixe d'un point à l'intérieur de la bande, la fonction définie par l'égalité

$$\Psi(x) = -\frac{\cos \frac{n\pi x}{\omega}}{n} \Sigma \sin \frac{n\pi a}{\omega} \frac{f(a)}{\sin \frac{\pi}{\omega}(x-a)},$$

où n est un nombre impair et

$$a = \frac{(2\eta+1)\omega}{2n}, \quad \eta = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2},$$

et

$$a = -\frac{(2\eta+1)\,\omega}{2n},\ \eta = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2},$$

quand $f(x+\omega) = f(x)$, et où n est un nombre pair et

$$a = \pm\frac{(2\eta+1)\,\omega}{2n},\ \eta = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-2}{2},$$

quand $f(x+\omega) = -f(x)$, tend vers $f(x)$, pour $m = \infty$.

Dans le premier cas on peut encore écrire

$$\Psi(x) = A_{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{n-3}\cos(n-3)\frac{\pi x}{\omega} + \cdots + A_0$$
$$+ B_{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi x}{\omega} + B_{n-3}\sin(n-3)\frac{\pi x}{\omega} + \cdots + B_2\sin 2\frac{\pi x}{\omega},$$

et dans le second

$$\Psi(x) = A_{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{n-3}\cos(n-3)\frac{\pi x}{\omega} + \cdots + A_1\cos\frac{\pi x}{\omega}$$
$$+ B_{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi x}{\omega} + B_{n-3}\sin(n-3)\frac{\pi x}{\omega} + \cdots + B_1\sin\frac{\pi x}{\omega},$$

où

$$A_0 = \frac{1}{n}\Sigma f(a),$$

$$A_k = \frac{2}{n}\Sigma\sin\frac{n\pi a}{\omega} f(a)\sin(n-k)\frac{\pi a}{\omega} = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\cos k\frac{\pi a}{\omega}, \quad (k>0)$$

$$B_k = \frac{2}{n}\Sigma\sin\frac{n\pi a}{\omega} f(a)\cos(n-k)\frac{\pi a}{\omega} = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin k\frac{\pi a}{\omega}.$$

4°. On transforme de la même manière les formules considérées dans le n° 24.

33. La doctrine exposée dans les n°s 26 à 31 peut être étendue de la même manière au cas où la période de la fonction $f(x)$ est égale à ω. On doit poser alors $x = \frac{X\omega}{2\pi}$ et considérer la fonction $f\left(\frac{X\omega}{2\pi}\right)$, qui admet la période 2π. Des résultats auxquels on arrive de cette manière nous indiquerons seulement les suivants.

1°. Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande comprise entre deux droites parallèles à la droite antérieurement représentée par D et

équidistantes de cette droite, et que x soit l'affixe d'un point à l'intérieur de cette bande, la fonction définie par l'égalité

$$\Psi_1(x) = \frac{\sin \frac{2n\pi x}{\omega}}{2 \sin \frac{\pi x}{\omega}} \Sigma(-1)^\eta \frac{\sin \frac{\pi a}{\omega}}{\sin \frac{\pi}{\omega}(x-a)} f(a),$$

où

$$a = \frac{\eta\omega}{2n},\ \eta = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (n-1),\ n,$$

tend vers $f(x)$, pour $n = \infty$.

On peut donner à la fonction $\Psi_1(x)$ la forme suivante:

$$\Psi_1(x) = A_{n-1} \cos (n-1) \frac{2\pi x}{\omega} + A_{n-3} \cos (n-3) \frac{2\pi x}{\omega} + \cdots + A_0$$

$$+ B_{n-1} \sin (n-1) \frac{2\pi x}{\omega} + B_{n-3} \sin (n-3) \frac{2\pi x}{\omega} + \cdots + B_1 \sin \frac{2\pi x}{\omega},$$

où

$$A_0 = \frac{1}{n} \Sigma' f(a),$$

Σ' représentant une somme qui se rapporte aux valeurs impaires de η, et

$$A_k = -\frac{2}{n} \Sigma (-1)^\eta f(a) \sin^2 \frac{(n-k)\pi a}{\omega},$$

$$B_k = \frac{1}{n} \Sigma f(a) \sin \frac{2k\pi a}{\omega}.$$

2°. On trouve de la même manière que la fonction $\Psi_1(x)$, définie par l'équation

$$\Psi_1(x) = f(0) \cos \frac{2n\pi x}{\omega} + \frac{1}{2} \Sigma \sin \frac{2n\pi a}{\omega} \frac{f(a) \cos \frac{2n\pi x}{\omega} \sin \frac{\pi x}{\omega}}{n \sin \frac{\pi}{\omega}(a-x) \sin \frac{\pi a}{\omega}}$$

ou

$$\Psi_1(x) = A_n \cos \frac{2n\pi x}{\omega} + A_{n-1} \cos \frac{2(n-1)\pi x}{\omega} + \cdots + A_0$$

$$+ B_n \sin \frac{2n\pi x}{\omega} + B_{n-1} \sin \frac{2(n-1)\pi x}{\omega} + \cdots + B_1 \sin \frac{2\pi x}{\omega},$$

où

$$A_0 = \frac{1}{2n}\Sigma f(a),$$

$$A_k = \frac{1}{2n}\Sigma f(a)\cos k\frac{2\pi a}{\omega}, \qquad (0 < k < n)$$

$$B_k = \frac{1}{2n}\Sigma f(a)\sin k\frac{2\pi a}{\omega}, \qquad (k < n)$$

$$A_n = f(0) - \frac{1}{2n}\Sigma \sin\frac{2n\pi a}{\omega} f(a)\cot\frac{\pi a}{\omega},$$

$$B_n = \frac{1}{2n}\Sigma \sin\frac{2n\pi a}{\omega} f(a),$$

$$a = \pm\frac{(2\eta+1)\omega}{4n}, \qquad (\eta = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

tend vers $f(x)$, pour $n = \infty$.

34. La formule (13.) peut être étendue au cas où la fonction $f(x)$ admet des pôles ou des points singuliers essentiels à l'intérieur de A, comme on va voir.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ces points. Il résulte d'une théorie que nous avons considérée dans ce journal (tome CXXII, p. 116) qu'il existent k développements $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ de la forme

$$\varphi_i(x) = \frac{A_1^{(i)}}{\sin(x-b_i)} + \frac{A_2^{(i)}}{\sin^2(x-b_i)} + \frac{A_3^{(i)}}{\sin^3(x-b_i)} + \cdots$$

telles que la fonction $F(x)$ définie par l'équation

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{i=k}\varphi_i(x)$$

est holomorphe dans l'aire limitée par A.

On peut donc lui appliquer la formule (13.), et il vient

$$F(x) = \Pi(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{F(z)\sin(x-a_1)\cdots\sin(x-a_m)}{\sin(z-x)\sin(z-a_1)\cdots\sin(z-a_m)}\,dz,$$

où $\Pi(x)$ représente une fonction entière de $\sin x$ et $\cos x$, qui satisfait aux conditions

$$\Pi(a_1) = f(a_1),\ \Pi(a_2) = F(a_2), \ldots, \Pi(a_m) = F(a_m).$$

Mais on a, en posant $P(x) = \sin(x-a_1)\ldots(x-a_m)$,

$$\int_A \frac{F(z)\,P(x)}{\sin(z-x)\,P(z)}\,dz = \int_A \frac{f(z)\,P(x)}{\sin(z-x)\,P(z)}\,dz - \sum_{i=1}^{i-k}\int_A \frac{\varphi_i(z)\,P(x)\,dz}{\sin(z-x)\,P(z)},$$

et

$$\int_A \frac{\varphi_i(z)\,P(x)}{\sin(z-x)\,P(z)}\,dz = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s^{(i)}\,P(x)\,dz}{\sin(z-x)\sin^s(z-b_i)\,P(z)},$$

$$\int_A \frac{dz}{\sin(z-x)\sin^s(z-b_i)\,P(z)} = 2i\pi\,(R_1+R_2+\cdots),$$

en représentant par $R_1, R_2, \ldots$ les résidus de la fonction

$$\frac{1}{\sin(z-x)\sin^s(z-b_i)\sin(z-a_1)\cdots\sin(z-a_m)}$$

par rapport à ses pôles.

Or, en posant $e^{iz}=t$ dans cette fonction, on obtient une fonction rationnelle de t, et on voit que le degré de son numérateur est inférieur de deux unités, au moins, à celui du dénominateur. En représentant donc par $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ses résidus par rapport à ses pôles et en ayant égard à un théorème bien connu on peut écrire

$$r_1+r_2+r_3+\cdots = 0.$$

Mais on a (***Hermite, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,*** p. 324)

$$r_1 = 2R_1, \quad r_2 = 2R_2, \ldots.$$

Donc

$$\int_A \frac{dz}{\sin(z-x)\sin^s(z-b_i)\,P(z)} = 0.$$

On a, par conséquent, la formule:

$$f(x) = \Pi(x) + \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_i(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin(x-a_1)\cdots\sin(x-a_m)}{\sin(z-x)\sin(z-a_1)\cdots\sin(z-a_m)}\,dz,$$

que nous voulions démontrer.

35. L'intégrale qui a été le point de départ des recherches contenues dans ce chapitre est un cas particulier de la suivante:

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin^\alpha(x-a_1)\cdots\sin^\lambda(x-a_m)}{\sin(z-x)\sin^\alpha(z-a_1)\cdots\sin^\lambda(z-a_m)}\,dz,$$

qu'on pouvait aussi étudier de la même manière, et étendre ainsi quelques-uns des résultats obtenus antérieurement. Mais nous ne considérerons pas cette généralisation, et nous allons nous occupper seulement de l'intégrale

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin^\alpha x}{\sin(z-x)\sin^\alpha z}\,dz,$$

qui se rapporte à la théorie du développement de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$.

En appliquant à cette intégrale le théorème fondamental de la théorie des residus, nous avons trouvé, dans un article publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XIV) les formules suivantes:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}\alpha-1} K_{2n+1} \sin^{2n+1} x + \cos x \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}\alpha-1} L_{2n} \sin^{2n} x + R(x),$$

si α est pair; et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} K'_{2n} \sin^{2n} x + \cos x \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} L'_{2n+1} \sin^{2n+1} x + R(x),$$

si α est impair, et nous avons donné une méthode pour calculer de proche en proche les coefficients. Il en résulte que, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par un ovale $|\sin z| = c$ (où $c \leqq 1$), on a, pour tout point x à son intérieur,

$$\text{(A)} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1} \sin^{2n+1} x + \cos x \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} \sin^{2n} x,$$

et

$$\text{(B)} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K'_{2n} \sin^{2n} x + \cos x \sum_{n=0}^{\infty} L'_{2n+1} \sin^{2n+1} x.$$

Or nous allons déduire ces résultats, et aussi des formules générales pour le calcul des coefficients, au moyen des théorèmes démontrés dans un travail sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus, que nous avons publié dans le tome 116 de ce journal.

Pour cela, nous remarquerons, en premier lieu, qu'on peut représenter d'une infinité de manières différentes $f(x)$ par des expressions de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \cos x,$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont, comme $f(x)$, holomorphes dans l'aire limitée par un ovale $|\sin z| = c$ ($c \leqq 1$), et qu'on peut compléter la détermination de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ au moyen de la condition que l'une de ces fonctions soit *paire* et l'autre *impaire*. On en conclut, en appliquant un théorème démontré dans l'article rapporté, qu'on peut développer $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$, quand x est l'affixe d'un point à l'intérieur de l'ovale considéré, et que, par conséquent, $f(x)$ peut être représentée par les deux développements précédentes.

Nous allons maintenant déterminer les coefficients de ces développements.

Soit premièrement $\varphi(x)$ une fonction ***paire*** et $\psi(x)$ une fonction ***impaire***. En appliquant à ces fonctions la formule (12.) de l'article rapporté on trouve

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} \varphi^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} \varphi''(0)}{1.2.3 \ldots 2n} \sin^{2n} x,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} \psi^{(2n-1)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} \psi'(0)}{1.2 \ldots (2n+1)} \sin^{2n+1} x,$$

et ensuite, en dérivant les deux membres de ces égalités par rapport à x et en changeant dans les résultats $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ en $\psi_1(x)$ et $\varphi_1(x)$,

$$\psi_1(x) = \cos x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_1^{(2n-1)}(0) + S_{2n}^{(1)} \psi_1^{(2n-3)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} \psi_1'(0)}{1.2 \ldots (2n-1)} \sin^{2n-1} x,$$

$$\varphi_1(x) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(2n)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} \varphi_1^{(2n-2)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} \varphi_1(0)}{1.2 \ldots 2n} \sin^{2n} x.$$

Mais, en posant

$$\varphi_1(x) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} \sin^{2n} x, \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1} \sin^{2n+1} x,$$

la formule (A) donne

$$f(x) = \psi(x) + \varphi_1(x),$$

et, par conséquent on a

$$f'(0) = \psi'(0),\ f'''(0) = \psi'''(0),\ \ldots,$$
$$f(0) = \varphi_1(0),\ \ f''(0) = \varphi_1''(0),\ \ \ldots.$$

Donc

$$L_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f(0)}{1.2 \ldots 2n},$$

$$K_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1.2 \ldots (2n+1)}.$$

On trouve de la même manière les formules suivantes:

$$L'_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + S_{2(n+1)}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \cdots + S_{2(n+1)}^{(n)} f'(0)}{1.2 \ldots (2n+1)},$$

$$K'_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f''(0)}{1.2 \ldots 2n}.$$

Dans ces formules $s_{2n+1}^{(m)}$ représente la somme des combinaisons des nombres

$$1^2, 3^2, 5^2, \ldots, (2n-1)^2$$

pris m à m; et $S_{2n}^{(m)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$2^2, 4^2, 6^2, \ldots, (2n-2)^2$$

pris aussi m à m.

Les formules précédentes peuvent être écrites symboliquement de la manière suivante:

$$L_{2n} = \frac{f^0(0)\,[f^2(0)+1^2]\,[f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1\,.\,2\ldots 2n},$$

$$K_{2n+1} = \frac{f(0)\,[f^2(0)+1^2]\,[f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1\,.\,2\ldots(2n+1)},$$

$$L'_{2n+1} = \frac{f(0)\,[f^2(0)+2^2]\,[f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n)^2]}{1\,.\,2\ldots(2n+1)},$$

$$K'_{2n} = \frac{f^2(0)\,[f^2(0)+2^2]\,[f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{1\,.\,2\ldots 2n}.$$

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft für das Jahr 1906.

Durch neuere Arbeiten von *Hurwitz, Matter, Krause**) u. a. hat die Theorie der *Bernoulli*schen Zahlen und Functionen nach verschiedenen Seiten hin eine bemerkenswerthe Erweiterung erfahren. Da eine Fortsetzung dieser Untersuchungen nicht blos für die Functionentheorie, sondern auch für die Zahlentheorie wie für die Theorie der elliptischen Funktionen von Wichtigkeit sein dürfte, so wünscht die Gesellschaft dazu die Anregung zu geben und schlägt, ohne damit die Arbeitsrichtung etwaiger Bewerber beschränken zu wollen,

> eine Untersuchung der den *Bernoulli*schen Zahlen analogen Zahlen, namentlich im Gebiete der elliptischen Functionen vor, welche die complexe Multiplication zulassen.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wenn nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den derz. Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1903 Geheimrat Professor Dr. Ferdinand Zirkel, Leipzig, Thalstrasse 33) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

*) Hurwitz, Göttinger Nachr. 1897, S. 273 und Mathem. Annalen Bd. 51, S. 196, Matter, Naturforsch. Gesellsch. Zürich 1900, S. 238, Krause, Leipziger Berichte 1902, S. 139.

Zur Theorie der Systeme.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Sind

$$A = (a_{ik}) \qquad \text{und} \qquad B = (b_{ik})$$

zwei Systeme n-ter Ordnung, deren Elemente ganze oder gebrochene Grössen eines beliebigen Rationalitätsbereiches sind, so heisst B ein Vielfaches von A, wenn man zwei *ganze* Multiplicatoren P und Q so bestimmen kann, dass:

$$B = PAQ \tag{1.}$$

ist. Dann gilt der für die ganze Determinantentheorie grundlegende Satz, dass B dann und nur dann ein Multiplum von A ist, wenn die Elementartheiler von B Vielfache der entsprechenden Elementartheiler von A sind. Ich habe für diesen zuerst von Herrn *Frobenius* aufgestellten und bewiesenen Satz im 114. Bande dieses Journals einen Beweis gegeben und ihn in einem an Herrn *P. Muth* gerichteten und von ihm im 122. Bande desselben Journals S. 84—87 veröffentlichten Briefe in einem wesentlichen Punkte vervollständigt. Bei der Herausgabe der *Kronecker*schen Vorlesungen über Determinantentheorie habe ich nun gesehen, dass die in jenem Zusatze angewandte Methode so modificirt werden kann, dass sie einen neuen ganz besonders einfachen Beweis jenes Satzes ergiebt. Ausserdem kann die hier angewandte Transformation eines Systems bei vielen Fragen der höheren Determinantentheorie mit Erfolg benutzt werden. Endlich lässt dieser Beweis auch erkennen, welches in jedem einzelnen Falle die Multiplicatoren sind, um welche sich die Elementartheiler von B von den entsprechenden Theilern des Systemes A unterscheiden.

Jedes der beiden ganzen Systeme P und Q in der Gleichung (1.) kann bekanntlich als ein Product von Einheitssystemen (ganzen Systemen

mit der Determinante Eins) und einer Anzahl von Elementarsystemen

$$(2.) \qquad (\overline{p}) = \begin{pmatrix} \overline{p}, 0, \dots 0 \\ 0, 1, \dots 0 \\ \vdots \\ 0, 0, \dots 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, in denen $\overline{p}$ eine irreductible ganze Grösse des Bereiches, also z. B. eine Primzahl, oder eine unzerlegbare Function von x, oder aber auch, worauf hier Gewicht zu legen ist, gleich Null sein kann.

Da nun durch die Composition des Systems A mit beliebigen Einheitssystemen, seine Elementartheiler bekanntlich nicht geändert werden, so ist die Richtigkeit unseres Satzes nur für den Fall zu beweisen, dass B aus A durch vordere oder durch hintere Composition mit einem Elementarsystem $(\overline{p})$ hervorgeht; und offenbar genügt es, den Beweis nur für einen von diesen Fällen, etwa für die vordere Composition zu führen. Es ist also nun zu zeigen, dass für die beiden Systeme:

$$(3.) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = (\overline{p})A = \begin{pmatrix} \overline{p}\,a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ \overline{p}\,a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ \vdots \\ \overline{p}\,a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

die Elementartheiler des zweiten Systems Multipla der entsprechenden Elementartheiler des ersten sind.

Ist $\overline{p} \gtrless 0$, so unterscheiden sich die Determinantentheiler, also auch die Elementartheiler von B von den entsprechenden Theilern von A höchstens durch eine Potenz von $\overline{p}$. Also braucht man in diesem Falle nur die in den Elementartheilern beider Systeme enthaltenen Potenzen von $\overline{p}$ mit einander zu vergleichen. Ist dagegen $\overline{p} = 0$, so ist der verlangte Beweis ebenfalls erbracht, wenn nachgewiesen ist, dass die Elementartheiler von B einen *beliebigen* Primfactor p mindestens ebenso oft enthalten, wie die Elementartheiler von A. Wir untersuchen daher die Elementartheiler von A und B nur in Bezug auf einen Primfactor p, welcher gleich $\overline{p}$ ist, falls $\overline{p} \gtrless 0$ ist, während wir p beliebig annehmen, wenn $\overline{p} = 0$ sein sollte.

Transformirt man nun das System A dadurch in ein anderes $\overline{A}$, dass man beliebig oft

1. irgend zwei Parallelreihen vertauscht,
2. zu einer Reihe ein Vielfaches einer Parallelreihe addirt,

3. eine Reihe mit einer p nicht enthaltenden ganzen oder gebrochenen Grösse multiplicirt,

aber dabei festhält, dass die beiden ersten Operationen niemals auf die erste Verticalreihe V_1 angewendet werden dürfen, so wird V_1 einerseits und das System der $(n-1)$ letzten Verticalreihen $(V_2, V_3, \ldots, V_n)$ andererseits völlig getrennt von einander transformirt. Durch eine solche Umformung geht also von selbst $B = (\overline{p})A$ in $\overline{B} = (\overline{p})\overline{A}$ über, und die Elementartheiler von $\overline{B}$ und $\overline{A}$ stimmen modulo p betrachtet mit denen von B und A überein, sodass man ebenso gut die transformirten Systeme untersuchen kann.

Durch die gestatteten Transformationen kann man nun bekanntlich das aus $(V_2, V_3, \ldots, V_n)$ bestehende Partialsystem für sich in ein Diagonalsystem überführen, dessen Diagonalelemente Potenzen von p sind, und von denen jedes ein Theiler des nächstfolgenden ist. Durch dieselben Umformungen geht dann das ganze System A in ein äquivalentes über, welches die folgende Form hat:

$$\begin{vmatrix} e_1, p^{\delta_1}, 0, \ldots\ldots 0 \\ e_2, 0, p^{\delta_2}, \ldots\ldots 0 \\ \vdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e_r, 0, 0, \ldots p^{\delta_r}, \ldots 0 \\ \vdots \\ e_n, 0, 0, \ldots 0, \ldots 0 \end{vmatrix}.$$

Hier ist allgemein $\delta_i \leqq \delta_{i+1}$, und ist r der Rang des Theilsystemes $(V_2, \ldots, V_n)$, so sind alle seine Diagonalglieder vom $(r+1)$-ten ab gleich Null.

Wir formen jetzt durch die gestatteten Transformationen dieses System so um, dass auch die Elemente e_i in Potenzen p^{ε_i} von p übergehen, von denen jede ein Theiler der folgenden ist, und die überdies so gewählt werden, dass in der Reihe $p^{\varepsilon_1}, p^{\varepsilon_2}, \ldots$ von dem ersten Gliede anfangend jeder Exponent $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ so klein als möglich wird. Ist nämlich allgemein $e_i = e_i^{(0)} p^{\varepsilon_i}$, so können wir zunächst von vornherein annehmen, dass ε_1 der kleinste unter allen Exponenten ist. Wäre nämlich etwa $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, so könnten wir die zweite Zeile H_2 zur ersten H_1 addiren, wodurch diese in

$$(e_1 + e_2, p^{\delta_1}, p^{\delta_2}, 0, \ldots, 0)$$

übergeht, und dann das dritte Element p^{δ_2} von H_1 wieder dadurch beseitigen, dass wir von V_3 das $p^{\delta_2 - \delta_1}$-fache von V_2 abziehen. Enthält ferner $e_1 = e_1^{(0)} p^{\varepsilon_1}$ die niedrigste Potenz von p, so können wir die erste Horizontalreihe H_1

durch $e_1^{(0)}$ dividiren, und hierauf V_2 mit $e_1^{(0)}$ multipliciren; dann tritt nur p^{ε_1} an die Stelle von e_1, während das System sonst ungeändert bleibt.

In gleicher Weise kann man nun erreichen, dass die in $e_2 = e_2^{(0)} p^{\varepsilon}$ enthaltene Potenz von p nicht grösser ist, als die in $e_3, \ldots, e_n$ auftretenden Potenzen. Ausserdem können wir aber auch voraussetzen, dass

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \leqq \delta_2 - \delta_1$$

ist. Wäre nämlich $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 + \delta_2 - \delta_1$, so braucht man nur zu der Horizontalreihe H_2 das $p^{\delta_2 - \delta_1}$-fache von H_1 zu addiren, wodurch sie in:

$$(e_2 + p^{\varepsilon_1 + \delta_2 - \delta_1}, p^{\delta_2}, p^{\delta_2}, 0 \ldots 0)$$

übergeht, und dann V_3 von V_2 zu subtrahiren. Dann ist das neue Glied $\overline{e}_2 = p^{\varepsilon_1 + \delta_2 - \delta_1} + e_2$ n. d. V. genau durch $p^{\varepsilon_1 + \delta_2 - \delta_1}$ theilbar, w. z. b. w. Fährt man in derselben Weise fort, so erhält man zuletzt ein zu A äquivalentes System:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} p^{\varepsilon_1}, & p^{\delta_1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ p^{\varepsilon_2}, & 0 & p^{\delta_2} & & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ p^{\varepsilon_r}, & 0 & 0 \ldots & p^{\delta_r} & \ldots & 0 \\ p^{\varepsilon_{r+1}}, & \ldots & \ldots & 0 \ldots & 0 & \\ 0, & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots & 0 & \\ \vdots & & & & & \\ 0, & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots & 0 & \end{pmatrix},$$

in welchem die Exponenten $\delta_1, \ldots, \delta_r$ einerseits und die Exponenten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+1}$ andererseits eine Reihe nicht abnehmender Zahlen bilden, wo aber die Exponenten δ ebenso rasch oder rascher zunehmen, wie die Exponenten ε, weil allgemein:

$$\delta_{i+1} - \delta_i \geqq \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \tag{4.}$$

ist. Sollte das $(r+1)$-te Element von V_1 gleich Null, also der Rang des ganzen Systems ebenfalls gleich r sein, so ist das Element $p^{\varepsilon_{r+1}}$ durch Null zu ersetzen. Das zugehörige System $\overline{B} = (\overline{p})\overline{A}$ ergiebt sich, falls $\overline{p} = p$ ist dadurch aus $\overline{A}$, dass die Exponenten ε_i um eine Einheit vergrössert werden; ist dagegen $\overline{p} = 0$, so ist in $\overline{A}$ einfach die erste Verticalreihe durch Nullen zu ersetzen.

Die Elementartheiler des Systems $\overline{A}$ kann man nun sehr leicht, z. B. dadurch bestimmen, dass man es nunmehr durch ganz beliebige Ele-

mentartransformationen in ein Diagonalsystem überführt. Es seien

$$(5.) \qquad \varepsilon_1 \geqq \delta_1,\ \varepsilon_2 \geqq \delta_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{i-1} \geqq \delta_{i-1}$$

und ε_i sei der erste Exponent, welcher kleiner als δ_i ist. Dann gilt dasselbe von allen folgenden Exponenten $\varepsilon_{i+1}, \ldots$, da diese ja nicht rascher zunehmen, als die Exponenten δ. Dann kann man zunächst an die Stelle der Elemente $p^{\varepsilon_1}, \ldots, p^{\varepsilon_{i-1}}$ dadurch Nullen bringen, dass man von V_1 der Reihe nach $p^{\varepsilon_1-\delta_1} V_2$, $p^{\varepsilon_2-\delta_2} V_3, \ldots, p^{\varepsilon_{i-1}-\delta_{i-1}} V_i$ subtrahirt. In dem so sich ergebenden Systeme kann man nun auch an die Stelle aller Elemente $p^{\varepsilon_{i+1}}$, $p^{\varepsilon_{i+2}}, \ldots, p^{\varepsilon_{r+1}}$ Nullen setzen, indem man, von H_{r+1} anfangend, von jeder Zeile H_{k+1} das $p^{\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k}$-fache der vorhergehenden Zeile H_k abzieht. So erhält man das äquivalente System:

$$\left|\begin{array}{llll}
0, p^{\delta_1}, & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & & & \\
0, 0, \ldots p^{\delta_{i-1}} & \ldots & \ldots & \ldots \\
p^{\varepsilon_i}, 0, \ldots\ldots p^{\delta_i}, & \ldots & \ldots & \ldots \\
0, 0, \ldots\ldots -p^{\delta_i+\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i}, & p^{\delta_{i+1}} & \ldots & \ldots \\
0, 0, \ldots\ldots 0 & -p^{\delta_{i+1}+\varepsilon_{i+2}-\varepsilon_{i+1}}, & p^{\delta_{i+2}} \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right|.$$

Hier kann man endlich die Elemente $p^{\delta_i}, p^{\delta_{i+1}}, \ldots$ dadurch successive zu Null machen, dass man ein geeignetes Multiplum von V_1 von V_{i+1}, hierauf ein Multiplum von V_{i+1} von V_{i+2} abzieht u. s. w. Ist das geschehen, so ergiebt sich ein äquivalentes System, welches nur die von Null verschiedenen Elemente

$$(6.) \quad p^{\delta_1}, \ldots, p^{\delta_{i-1}},\ p^{\varepsilon_i},\ p^{\delta_i+(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i)},\ p^{\delta_{i+1}+(\varepsilon_{i+2}-\varepsilon_{i+1})}, \ldots, p^{\delta_r+(\varepsilon_{r+1}-\varepsilon_r)}$$

enthält, welche sämmtlich verschiedenen Zeilen und verschiedenen Colonnen angehören. Und da die Exponenten von p offenbar auch ihrer Grösse nach auf einander folgen, so sind diese Potenzen von p in der That die Elementartheiler von $\bar{A}$. Genau dasselbe Resultat ergiebt sich unter Anwendung genau derselben Elementartransformationen, wenn man unter ε_i den ersten Exponenten versteht, welcher *gleich* δ_i oder kleiner als δ_i ist.

Um nun die Elementartheiler des Systems $\bar{B} = (\bar{p})\bar{A}$ zu finden, hat man, falls $\bar{p} = p$ ist, alle Exponenten ε_k um eine Einheit zu vergrössern. Dann folgt aus (5.), dass:

$$(7.) \qquad \varepsilon_1 + 1 > \delta_1, \ldots, \varepsilon_{i-1} + 1 > \delta_{i-1}$$

und dass ε_i+1 der erste Exponent ist, welcher gleich δ_i oder kleiner als δ_i ist. Also sind in diesem Falle die Elementartheiler von $\overline{B}$ gleich:

$$(8.) \qquad p^{\delta_1},\ p^{\delta_2},\ \ldots,\ p^{\delta_{i-1}},\ p^{\varepsilon_i+1},\ p^{\delta_i+(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i)},\ \ldots;$$

d. h. alle Elementartheiler von $\overline{B}$ sind Multipla der entsprechenden Elementartheiler von A; und zwar hat sich höchstens einer der Elementartheiler bei dem Uebergange von A zu B um den Factor p vermehrt. Ist dagegen $\bar{p}=0$, geht also $\overline{B}$ aus $\overline{A}$ durch Weglassung der ersten Verticalreihe hervor, so sind die Elementartheiler von $\overline{B}$

$$(9.) \qquad p^{\delta_1},\ \ldots,\ p^{\delta_{i-1}}\ p^{\delta_i},\ p^{\delta_{i+1}},\ \ldots,\ p^{\delta_r};$$

sie sind also wegen (4.) ebenfalls Multipla der entsprechenden Elementartheiler von $\overline{A}$, da n. d. V. allgemein

$$\delta_{k+1}=\delta_k+(\delta_{k+1}-\delta_k)\geqq\delta_k+(\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k)$$

ist. Der Satz ist somit in allen seinen Theilen bewiesen.

Ueber die Brennpunkte, die Leitlinien und die Orthogonale einer ebenen algebraischen Curve beliebiger Klasse.

(Von Herrn *O. Zimmermann* in Zoppot.)

Das Problem, die Brennpunkte einer ebenen algebraischen Curve zu bestimmen, ist ein specieller Fall der allgemeinen Aufgabe, die Schnittpunkte der Tangenten zu finden, welche sich von zwei conjugirt imaginären Punkten an eine solche Curve ziehen lassen. Der grösseren Klarheit der Vorstellungen wegen ist es jedoch vorzuziehen, jenes specielle Problem zu behandeln, wonach dann der allgemeine Fall nicht mehr besonders erörtert zu werden braucht.

§ 1.

Es sei C_m eine beliebige algebraische Curve m-ter Klasse. Ihre Brennpunkte sind die m^2 Schnittpunkte der Tangenten, welche sich von den beiden unendlichen Kreispunkten J, J' an die Curve ziehen lassen. Wir nehmen nun in der Ebene der Curve C_m irgend eine circulare Curve q-ter Ordnung C_*^q an. Ferner denken wir uns eine Reihe von Curven n-ter Ordnung, unter denen sich eine circulare befindet, welche durch C_*^n bezeichnet werden möge. Eine beliebige Curve C^n der Reihe schneidet C_*^q in nq Punkten $\mathfrak{p}$, von denen an die gegebene Curve C_m je m Tangenten gehen, welche sich gegenseitig in

$$\frac{1}{2}\, m^2 nq\,(nq-1)$$

Punkten $\mathfrak{a}$ treffen. Während C^n die Reihe durchläuft, beschreiben die Punkte $\mathfrak{a}$ eine Curve Φ, welche durch die m^2 Brennpunkte von C_m geht.

Denn der Reihe gehört auch die circulare Curve C_*^n an, welche C_*^q unter anderen in den unendlichen Kreispunkten J, J' trifft.

Durch das angegebene Verfahren erhält man allerdings nur solche reellen Punkte der Curve Φ, von denen (unter anderen) je zwei *reelle* Tangenten t, t' an die Curve C_m gehen, welche C_*^q in Punkten treffen, von denen auf t und t' je ein reeller so gelegen ist, dass eine reelle Curve C^n der Reihe sie passirt. Man erhält jedoch nicht diejenigen reellen Punkte α' der Curve Φ (und die reellen Brennpunkte der Curve C_m gehören zu ihnen), von denen unter anderen zwei *imaginäre* Tangenten t_*, t_*' an C_m gehen, welche C_*^q unter anderen in zwei (imaginären) Punkten so treffen, dass auf t_* und t_*' je einer so liegt, dass eine *reelle* Curve der Reihe sie passirt.

Durch das angegebene Verfahren erhält man aber auf den sich ergebenden Theilen der Curve Φ beliebig viele reelle Punkte, welche zur Erzeugung der ganzen Curve ausreichen, wenn ihre Ordnung bekannt ist.*)

Wählt man nun zur Vereinfachung des Verfahrens für die circularen Curven C_*^q und C_*^n bez. die g_∞ und einen beliebigen Kreis (der jedoch so gelegen sein muss, dass mindestens von einem Theile desselben reelle Tangenten an die Curve C_m gehen), oder umgekehrt, so ergeben sich zwei Fälle, in denen, wie unten gezeigt werden wird, die Ordnung der Curve Φ leicht bestimmbar ist. Danach kann dieselbe durch Curvenbüschel niederer Ordnung in der a. a. O. angegebenen Weise vollständig erzeugt werden.

Beschafft man durch ein analoges Verfahren zwei neue Curven Φ', Φ'', so schneiden dieselben Φ in den m^2 Brennpunkten der Curve C_m.

Erster Fall.

§ 2.

Wir wollen also für die Curve C_*^q die g_∞, für die Curvenreihe n-ter Ordnung aber ein Kegelschnittbüschel nehmen, welches einen Kreis $\mathfrak{C}^2$ enthält. Dann schneidet das Kegelschnittbüschel die g_∞ in einer quadratischen Punktinvolution $(\mathfrak{I})_*^2$, für welche J, J' ein conjugirtes Paar bilden. Eine solche Punktinvolution spannt an einem beliebigen Punkte der Ebene, wie leicht ersichtlich, eine *hyperbolisch-gleichseitige* quadratische Strahleninvolution. Daher wollen wir eine solche quadratische Punktinvolution der g_∞, welcher

*) *Cremona*, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Uebersetzung von *M. Curtze*, Greifswald 1865, *Th. Kunike*, S. 76, § 10, 53 ff.

J, J' als ein conjugirtes Punktepaar angehören, eine ***hyperbolisch-gleichseitige quadratische Punktinvolution der*** g_x nennen, wobei eine Verwechselung ausgeschlossen ist.

Von je zwei conjugirten Punkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ der $(\mathfrak{J})^2_*$ ziehen wir an C_m die m Tangenten, welche sich in m^2 Punkten $\mathfrak{a}$ schneiden mögen. Während die Gruppe $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ die Involution durchläuft, beschreiben die m^2 Punkte $\mathfrak{a}$ eine Curve Φ, welche durch die m^2 Brennpunkte von C_m geht.

Es muss nun die Ordnung der Curve Φ bestimmt werden. Zu dem Ende denke man sich den dual entsprechenden Fall, und zwar folgendermassen verallgemeinert:

Es sei eine Strahleninvolution 1. Ranges n-ten Grades $(J)^n$ mit dem Mittelpunkt O gegeben, welcher ein k-facher Punkt einer beliebigen festen Curve p-ter Ordnung C^p ist. Jede Strahlengruppe der Involution trifft C^p ausser in O noch in je $n(p-k)$ Punkten, deren Verbindungslinien eine Curve umhüllen, welche durch Σ_{σ_*} bezeichnet werden möge.*) Um ihre Klasse zu ermitteln, bestimmen wir diejenigen ihrer Tangenten, welche durch einen beliebigen Punkt A der Ebene gehen. Ein beliebiger Strahl o des Punktes O trifft C^p ausser in O noch in $p-k$ Punkten P. Deren Verbindungslinien mit A treffen C^p in $(p-1)(p-k)$ neuen Punkten Q, welche in O die Strahlen ω spannen mögen. Dann entsprechen einem Strahle o stets $(p-1)(p-k)$ Strahlen ω, und umgekehrt. Ferner entsprechen einem Strahle o in der Involution $n-1$ conjugirte Strahlen ω' und umgekehrt. Mithin fallen**)

$$(1.) \qquad 2(n-1)(p-1)(p-k)$$

Strahlen ω, ω' zusammen, welche einem und demselben Strahle o_* des Punktes O entsprechen. Wir wollen die zusammengefallenen Strahlen ω, ω' durch ω_* bezeichnen. Dann ist o_* auch ein Coïncidenzstrahl ω, ω', wenn man ω_* als einen Strahl o betrachtet. Daher giebt es in der Involution $(J)^n$

$$(2.) \qquad (n-1)(p-1)(p-k)$$

Paare von Strahlen o_*, ω_*, welche einer Gruppe angehören und die Curve C^p beziehlich in Punkten P_*, Q_* treffen, von denen eine Verbindungslinie durch

*) Diese Curve, für welche diese Abhandlung nur eine Anwendung darstellt, ist von mir auch für den allgemeinen Fall behandelt worden, wo die Strahleninvolution durch irgend eine Curvenreihe vertreten wird.

**) Vgl. dieses Journal, Bd. 123, S. 4, § 2.

A läuft. Dieselbe ist daher eine Tangente der Enveloppe Σ_{σ_*}, deren Klasse also gleich (2.) ist.

Befindet sich der Punkt O nicht auf C^p, so ist $k = 0$ und

$$\sigma_* = p\,(p-1)\,(n-1). \tag{3.}$$

Behufs einer (hier ausreichenden theilweisen) Charakteristik der Curve Σ_{σ_*} müssen die beiden Fälle der Lage des Mittelpunktes O der Involution getrennt werden.

I. Der Punkt O liegt nicht auf der Curve C^p.

1. ***Die Dupel der Involution berühren C^p nicht*).***

Wie leicht ersichtlich, sind die $2\,(n-1)$ Dupel der Involution $\frac{1}{2}p\,(p-1)$-fache Tangenten von Σ_{σ_*}, und es gehen an diese Curve von O aus keine anderen Tangenten, denn es ist jetzt

$$\sigma_* = p\,(p-1)\,(n-1).$$

Bezeichnen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p \tag{4.}$$

die Schnittpunkte eines Dupels d mit C^p, so werden je zwei dieser Punkte durch O und einen Berührungspunkt harmonisch getrennt, was sich durch eine Infinitesimalbetrachtung sofort ergiebt. Ferner sind die Tangenten, welche die Curve C^p in den Punkten (4.) hat, zugleich Tangenten der Curve Σ_{σ_*}, ohne sie jedoch im allgemeinen in diesen Punkten zu berühren.

Die zu d conjugirten $n-2$ Strahlen der Involution schneiden die Curve C^p in $p\,(n-2)$ Punkten P, welche p-fache Punkte von Σ_{σ_*} sind. Ihre Tangenten gehen nach den Punkten (4.).

Eine der Tangenten, welche sich von O aus an C^p ziehen lassen, heisse t, ihr Berührungspunkt B. Die zu t conjugirten $n-1$ Strahlen der Involution schneiden C^p in $p\,(n-1)$ Punkten, welche der Curve Σ_{σ_*} angehören, und ihre Tangenten laufen in B zusammen.

---

*) Unter „*Dupel*“ verstehe ich *Doppelpunkte* von Punktreihen oder *Doppelstrahlen* von Strahlenbüscheln, mit „*Doppelpunkt*“ dagegen bezeichne ich einen *Doppelpunkt einer Curve.*

2. ***Ein Dupel der Involution berührt C^p.***

Berührt ein Dupel d_* die Curve C^p in β Punkten $\mathfrak{b}$ und schneidet dieselbe also noch in $p-2\beta$ Punkten, die durch $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden mögen, so berührt Σ_{σ_*} die Curve C^p in den Punkten $\mathfrak{b}$. Ausserdem berührt Σ_{σ_*} das Dupel d_* in $\frac{1}{2}(p-2\beta)(p-2\beta-1)$ Punkten $\mathfrak{a}'$, welche mit O zusammen je zwei der Punkte $\mathfrak{a}$ harmonisch trennen.

Diejenigen $\beta(p-2\beta)$ Punkte $\mathfrak{w}_1$, welche mit O zusammen je einen Punkt $\mathfrak{a}$ und einen Punkt $\mathfrak{b}$ harmonisch trennen, sind Wendepunkte der Curve Σ_{σ_*}, und das Dupel d_* ist ihre Wendetangente.

Diejenigen $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ Punkte $\mathfrak{w}_2$, welche mit O zusammen je zwei Punkte $\mathfrak{b}$ harmonisch trennen, sind Wendepunkte zweiter Ordnung, in denen die Curve Σ_{σ_*} die zugehörige Wendetangente d_* fünfpunktig schneidet. Wie man sieht, ist d_* wieder eine $\frac{1}{2}p(p-1)$-fache Tangente von Σ_{σ_*}, denn es ist

$$\frac{1}{2}p(p-1) = \beta+\frac{1}{2}(p-2\beta)(p-2\beta-1)+2\beta(p-2\beta)+2\beta(\beta-1).$$

Ein zu d_* conjugirter Strahl o der Involution schneidet die Curve C^p in p Punkten P, welche p-fache Punkte von Σ_{σ_*} sind. Von den p Tangenten eines Punktes P gehen $p-2\beta$ nach den Punkten $\mathfrak{a}$, während in den nach den β Punkten $\mathfrak{b}$ gehenden je ein Paar zusammenfällt.

Die Tangenten, welche die Curve C^p in den Punkten $\mathfrak{a}$ hat, berühren Σ_{σ_*} auch, aber im allgemeinen nicht in diesen Punkten.

Berühren mehrere Dupel der Involution die Curve C^p, so gilt für sie Entsprechendes; im übrigen bleibt das unter 1. Gesagte bestehen.

II. Der Punkt O ist ein k-facher Punkt der Curve C^p.

1. ***Die Dupel der Involution berühren C^p nicht.***

Ein Dupel d der Involution ist jetzt für die Curve Σ_{σ_*} eine $\frac{1}{2}(p-k)(p-k-1)$-fache Tangente, und seine Berührungspunkte trennen zusammen mit O je zwei der $p-k$ Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{p-k} \tag{5.}$$

harmonisch, in welchen d die Curve C^p ausserhalb O noch trifft.

Die Tangenten von C^p in den Punkten (5.) berühren auch Σ_{σ_*}, aber im allgemeinen nicht in diesen Punkten.

Die zu einem Dupel d conjugirten $n-2$ Strahlen der Involution treffen C^p ausserhalb O noch in $(n-2)(p-k)$ Punkten, welche $(p-k)$-fache Punkte von Σ_{σ_*} sind, und ihre Tangenten gehen nach den Punkten (5.).

Eine der Tangenten, welche von O aus an C^p geht, aber nicht in O berührt, heisse t, ihr Berührungspunkt B. Dann schneiden die zu t conjugirten $n-1$ Strahlen der Involution die Curve C^p ausserhalb O noch in $(n-1)(p-k)$ Punkten, welche der Curve Σ_{σ_*} angehören, und ihre Tangenten laufen in B zusammen.

Da jetzt für die Curve Σ_{σ_*} die Klasse

$$\sigma_* = (n-1)(p-1)(p-k)$$

ist, so gehen ausser den Dupeln nun von O aus noch

$$k(n-1)(p-k) = (n-1)(p-1)(p-k) - (n-1)(p-k)(p-k-1)$$

Tangenten an Σ_{σ_*}.

Ist nämlich τ eine in O berührende Tangente von C^p, so sind die zu τ conjugirten $n-1$ Strahlen der Involution offenbar $(p-k)$-fache Tangenten der Curve Σ_{σ_*}.

2. ***Ein Dupel der Involution berührt C^p.***

a) ***Berührt ein Dupel d_* die Curve C^p ausserhalb O*** in β Punkten $\mathfrak{b}$ und schneidet sie also noch in $p-2\beta-k$ Punkten, welche $\mathfrak{a}$ heissen mögen, so berührt Σ_{σ_*} das Dupel d_* in den Punkten $\mathfrak{b}$ und in den $\frac{1}{2}(p-2\beta-k)(p-2\beta-k-1)$ Punkten $\mathfrak{a}'$, welche mit O zusammen je zwei der Punkte $\mathfrak{a}$ harmonisch trennen. Die $\beta(p-2\beta-k)$ Punkte $\mathfrak{w}_1$, welche mit O zusammen je einen Punkt $\mathfrak{a}$ und einen Punkt $\mathfrak{b}$ harmonisch trennen, sind Wendepunkte von Σ_{σ_*}, und d_* ist die zugehörige Wendetangente. Die $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ Punkte $\mathfrak{w}_2$, welche mit O zusammen je zwei der Punkte $\mathfrak{b}$ harmonisch trennen, sind Wendepunkte zweiter Ordnung, in denen die Curve Σ_{σ_*} die zugehörige Wendetangente d_* fünfpunktig schneidet.

Die Tangenten von C^p in den Punkten $\mathfrak{a}$ berühren auch die Curve Σ_{σ_*}, aber im allgemeinen nicht in diesen Punkten.

Die zu d_* conjugirten $n-2$ Strahlen der Involution treffen C^p ausserhalb O noch in $(n-2)(p-k)$ Punkten, welche $(p-k)$-fache Punkte von Σ_{σ_*} sind. Von den Tangenten eines solchen Punktes gehen $p-2\beta-k$ nach den Punkten $\mathfrak{a}$, während β Paare zusammenfallender Tangenten nach den Punkten $\mathfrak{b}$ laufen. Mithin ist d_* eine $\frac{1}{2}(p-k)(p-k-1)$-fache Tangente von Σ_{σ_*}. Sind mehrere Dupel vorhanden, welche die Curve C^p ausserhalb O berühren, so findet Entsprechendes statt. Im übrigen gilt dasselbe wie unter 1.

b) ***Berührt ein Dupel d_{**} die Curve C^p in O und ausserdem in β Punkten*** $\mathfrak{b}$, so schneidet dasselbe C^p ausserhalb O noch in $p-2\beta-k-1$ Punkten, welche durch $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden mögen. Alsdann findet Folgendes statt:

Die Curve Σ_{σ_*} berührt das Dupel d_{**} in den β Punkten $\mathfrak{b}$ und in denjenigen $\frac{1}{2}(p-2\beta-k-1)(p-2\beta-k-2)$ Punkten $\mathfrak{a}'$, welche mit O zusammen je zwei der Punkte $\mathfrak{a}$ harmonisch trennen. Ausserdem berührt Σ_{σ_*} das Dupel d_{**} in O, und zwar $(p-2\beta-k-1)$-mal.

Diejenigen $\beta(p-2\beta-k-1)$ Punkte $\mathfrak{w}_1$, welche mit O zusammen je einen Punkt $\mathfrak{a}$ und einen Punkt $\mathfrak{b}$ harmonisch trennen, sind Wendepunkte von Σ_{σ_*}, und das Dupel d_{**} ist ihre Wendetangente.

Diejenigen $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ Punkte $\mathfrak{w}_2$, welche mit O zusammen je zwei der Punkte $\mathfrak{b}$ harmonisch trennen, sind Wendepunkte zweiter Ordnung der Curve Σ_{σ_*}, welche die zugehörige Wendetangente d_{**} in ihnen fünfpunktig schneidet.

Ferner ist O (man erkennt dies durch Betrachtung der Punkte der Curve C^p in der Umgebung von O und von einem der Punkte $\mathfrak{b}$) für die Curve Σ_{σ_*} ein β-facher sichelförmiger Rückkehrpunkt, dessen beide Zweige auf einer und derselben Seite der zugehörigen Rückkehrtangente d_{**} liegen.

Die Tangenten der Curve C^p in den $p-2\beta-k-1$ Punkten $\mathfrak{a}$ und in O (also d_{**} selber) berühren Σ_{σ_*} auch, aber im allgemeinen nicht in diesen Punkten.

Mithin ist jetzt das Dupel d_{**} eine

$$\left[\frac{1}{2}(p-k)(p-k-1)+1\right]\text{-fache}$$

Tangente von Σ_{σ_*}, es lassen sich aber an diese Curve von O aus

$$\frac{1}{2}(p-k)(p-k+1)$$

Tangenten ziehen, die mit d_{**} zusammenfallen.

Die zu d_{**} conjugirten $n-2$ Strahlen der Involution sind $(p-k)$-fache Tangenten von Σ_{σ_*}, ihre $(n-2)(p-k)$ ausserhalb O gelegenen Schnittpunkte mit der Curve C^p sind $(p-k)$-fache Punkte von Σ_{σ_*}, und es gehen von einem solchen Punkte $p-2\beta-k$ Tangenten nach den Punkten O und $\mathfrak{a}$, während nach den Punkten $\mathfrak{b}$ je zwei zusammenfallende Tangenten laufen.

Berühren mehrere Dupel der Involution die Curve C^p in O, so gilt für sie Entsprechendes, und im übrigen findet das unter 1. und 1, a) Gesagte Anwendung.

Jede andere Annahme über die Berührungen der Dupel der Involution mit Σ_{σ_*} etc., wie sie in diesem Paragraphen beschrieben worden sind, führt zu widersinnigen Folgerungen.

Zerfall der Curve Σ_{σ_*}.

Es möge noch auf den etwaigen Zerfall der Curve Σ_{σ_*} hingedeutet werden, obwohl der Gegenstand hier, als zu weit führend, nicht erschöpfend behandelt werden kann.

Gehören k' Tangenten des k-fachen Punktes O der Curve C^p einer und derselben Gruppe der Involution $(J)^n$ an, so ist derselbe, als Enveloppe betrachtet, offenbar ein $\frac{1}{2}k'(k'-1)$-facher Bestandtheil der Gesammtcurve Σ_{σ_*}. Die Klasse der übrigbleibenden eigentlichen Curve $\Sigma_{\sigma'_*}$ ist also gleich

$$(n-1)(p-1)(p-k)-\frac{1}{2}k'(k'-1).$$

Jene k' Tangenten sind $(k'-1)(p-k-1)$-fache Tangenten, und die mit ihnen eine Gruppe der Involution bildenden $n-k'$ Strahlen sind $k'(p-k)$-fache Tangenten der Curve $\Sigma_{\sigma'_*}$.

Haben k'' Tangenten des k-fachen Punktes O, welche einer und derselben Gruppe der Involution angehören, in O mit je

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{k''}$$

Zweigen der Curve C^p eine Berührung, so ist O ein

$$[\varkappa_1(\varkappa_2+\cdots+\varkappa_{k''})+\varkappa_2(\varkappa_3+\cdots+\varkappa_{k''})+\cdots\varkappa_{k''-1}\cdot\varkappa_{k''}]\text{-facher}$$

Bestandtheil der Gesammtcurve etc. etc.

Fallen von den k Tangenten des Punktes O

$$k_1, k_2, \ldots, k_\lambda$$

je in eine zusammen, und gehören diese λ Tangenten einer und derselben Gruppe der Involution an, so ist O ein $\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)$-facher Bestandtheil der Gesammtcurve $\Sigma_{\sigma *}$, welche also noch aus einer eigentlichen Curve von der Klasse

$$(n-1)(p-1)(p-k)-\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)$$

besteht, und jene λ Tangenten sind für sie $(\lambda-1)(p-k-1)$-fache Tangenten. Die mit jenen λ Tangenten eine Gruppe der Involution bildenden $n-\lambda$ Strahlen gehören der Curve aber als $\lambda(p-k)$-fache Tangenten an.

§ 3.

Um jetzt die Brennpunkte der Curve C_m zu construiren, nehmen wir auf der g_∞ eine hyperbolisch-gleichseitige quadratische Punktinvolution $(\mathfrak{J})^2_*$ an. Von den beiden Punkten jeder ihrer Gruppen gehen an C_m je m Tangenten, die sich in m^2 Punkten $\mathfrak{a}$ schneiden, deren Ort eine Curve $m(m-1)$-ter Ordnung $\Phi^{m(m-1)}$ ist und ***Fokalcurve*** heissen möge; denn sie geht durch die m^2 Brennpunkte von C_m.

Die Dupel von $(\mathfrak{J})^2_*$ sind $\frac{1}{2}m(m-1)$-fache Punkte der Fokalcurve, welche C_m unter anderen in den Berührungspunkten der Tangenten schneidet, die von jenen Dupeln an C_m gehen.

Eine Asymptote der Curve C_m möge p, ihr Schnittpunkt mit der g_∞ aber P_∞ heissen. Zu P_∞ gehört ein conjugirter Punkt P'_∞ der Involution $(\mathfrak{J})^2_*$, von welchem aus m Tangenten p' an C_m gehen. Dieselben berühren die Fokalcurve in den Schnittpunkten, welche sie mit der Asymptote p gemeinsam haben.

Denkt man sich alle möglichen hyperbolisch-gleichseitigen quadratischen Punktinvolutionen auf der g_∞, so entspricht ihnen eine Reihe von Fokalcurven, von denen $\frac{1}{2}m(m-1)$ durch einen beliebigen Punkt Q der Ebene laufen. Denn die m Tangenten, welche von Q an die Curve C_m gehen, lassen sich in $\frac{1}{2}m(m-1)$ Paare ordnen, von denen jedes die g_∞ in zwei Punkten trifft, welche eine jener Involutionen bestimmen.

Ist $m>2$, so sind drei Fokalcurven nöthig, um die Brennpunkte der Curve C_m zu erhalten.

Ist C_m ein Centralkegelschnitt, so bilden sämmtliche Fokalcurven ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln H^2, dessen Grundpunkte die Brennpunkte sind. Einer solchen Hyperbel können unendlich viele Parallelogramme einbeschrieben werden, welche dem Centralkegelschnitt umbeschrieben sind, und deren Seiten die g_∞ in zwei Punkten treffen, welche die unendlichen Punkte der gleichseitigen Hyperbel harmonisch trennen. Alle diese gleichseitigen Hyperbeln sind mit dem Centralkegelschnitte concentrisch. Die zu den Asymptoten einer solchen gleichseitigen Hyperbel parallelen Tangenten des Centralkegelschnittes berühren diesen in den Punkten, welche er mit jener gemein hat. Die gemeinsamen Tangenten t beider Curven gehen durch diejenigen Punkte der g_∞, welche mit je einem unendlichen Punkte des Centralkegelschnittes zusammen die unendlichen Punkte der gleichseitigen Hyperbel harmonisch trennen. Der Berührungspunkt der gleichseitigen Hyperbel mit einer Tangente t liegt auf derjenigen Asymptote des Centralkegelschnittes, welche mit t die unendlichen Punkte der gleichseitigen Hyperbel harmonisch trennt.

Die Axen des Centralkegelschnittes bilden das einzige reelle Geradenpaar des Büschels gleichseitiger Hyperbeln, und man erkennt leicht, dass auf der grossen (reellen) Axe zwei reelle, auf der kleinen (imaginären) Axe aber zwei imaginäre Brennpunkte liegen.

Um die Brennpunkte eines Centralkegelschnittes mittelst des ***Kreises*** zu construiren, wähle man auf einer Axe a desselben ein Paar beliebige ausserhalb des Kegelschnittes befindliche Punkte α, α'. Diese bestimmen mit den (als bekannt fingirten) Brennpunkten dieser Axe eine quadratische Punktinvolution $(\mathfrak{J})^2$. Die von zwei conjugirten Punkten derselben an den Centralkegelschnitt gezogenen Tangentenpaare schneiden einander in vier Punkten, deren Ort ein Kreis $\mathfrak{C}^2$ ist. Derselbe geht durch die Brennpunkte der anderen Axe, durch die Dupel jener Involution und durch die vier Berührungspunkte der Tangenten, die sich von den Dupeln aus an den Centralkegelschnitt ziehen lassen. Von denjenigen Punkten der $(\mathfrak{J})^2$, welche zu den auf der Axe a gelegenen Scheiteln des Centralkegelschnittes konjugirt sind, gehen je zwei gemeinschaftliche Tangenten der beiden Curven aus. Sie berühren den Kreis $\mathfrak{C}^2$ in seinen Schnittpunkten mit der betr. Scheiteltangente.

Legt man also durch die vier Schnittpunkte der von zwei beliebigen Punkten einer Axe an einen Centralkegelschnitt gezogenen Tangenten

einen Kreis, so enthält dieser die Brennpunkte der anderen Axe, etc. etc. Und: Die Tangente und die Normale eines Punktes eines Centralkegelschnittes schneiden eine Axe desselben in den Endpunkten eines Durchmessers eines Kreises, welcher durch die Brennpunkte der anderen Axe geht, etc. etc. (Dieser Satz ist z. T. bereits bekannt.)

Man kann auch sagen: Derjenige Kreis, welcher eine Tangente eines Centralkegelschnittes in ihrem Schnittpunkte mit einer Scheiteltangente berührt und seinen Mittelpunkt auf der zu dieser senkrechten Axe hat, geht durch die Brennpunkte der anderen Axe, etc. etc.

Beachtet man bei der Ellipse das von den Scheiteltangenten gebildete Rechteck, so erkennt man, dass der Abstand ihrer reellen Brennpunkte von den Scheiteln der kleinen Axe gleich der halben grossen Axe ist. (Die metrische Beziehung für Ellipse und Hyperbel wird auf andere Weise noch in § 7 abgeleitet werden.) —

Ist die g_∞ eine k-fache Tangente der Curve C_m, so ist die Fokalcurve von der Ordnung $(m-1)(m-k)$. Sie hat die Dupel von $(\mathfrak{F})_*^2$ zu $\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)$-fachen Punkten, die zu den Berührungspunkten der g_∞ conjugirten Punkte der Involution aber zu $(m-k)$-fachen Punkten. Die Curve C_m wird von der Fokalcurve in den Berührungspunkten der $2(m-k)$ Tangenten geschnitten, welche ausser der g_∞ von den Dupeln der $(\mathfrak{F})_*^2$ an C_m gehen. Ist P_∞ ein Schnittpunkt der Curve C_m mit der g_∞, so gehen von dem ihm conjugirten Punkte der $(\mathfrak{F})_*^2$ ausser der g_∞ noch $m-k$ Tangenten an C_m, welche die Fokalcurve in denjenigen Punkten berühren, wo sie die durch P_∞ gehende Asymptote der Curve C_m schneiden etc.

Ist $(m-1)(m-k) > 2$, so sind drei Fokalcurven zur Bestimmung der Brennpunkte von C_m nöthig. Die nähere Beschreibung der Fokalcurven ergiebt sich für die wichtigsten besonderen Fälle dualistisch aus der im vorigen Paragraphen mitgetheilten Charakterisirung der Curve Σ_{σ_*}.

Die auf der g_∞ liegenden Brennpunkte lassen sich am kürzesten ohne Hilfe der Fokalcurven in bekannter Weise finden. (Vgl. das Werk von ***Salmon-Fiedler*** über die ***Höheren ebenen Curven***).

Für die Parabel sind die Fokalcurven die Brennstrahlen ihres im Endlichen gelegenen Brennpunktes, zu denen auch die Axe gehört, deren unendlicher Punkt der andere reelle Brennpunkt ist.

Zwei beliebige ausserhalb der Parabel befindliche Punkte ihrer Axe bestimmen als conjugirte mit ihren beiden Brennpunkten zusammen eine quadratische Punktinvolution. Die von zwei conjugirten Punkten derselben an die Parabel gezogenen Tangenten schneiden einander in vier Punkten, deren Ort ein Kreis $\mathfrak{C}^2$ ist, welcher durch die Dupel der Involution geht und den im Endlichen gelegenen Brennpunkt zum Mittelpunkt hat. Die Berührungspunkte der von den Dupeln an die Parabel gezogenen Tangenten sind die Schnittpunkte dieser Curve mit $\mathfrak{C}^2$. Die zu den Scheiteln der Parabel conjugirten Punkte der Involution sind die Schnittpunkte je zweier gemeinsamer Tangenten beider Curven, und der Kreis berührt sie in seinen Schnittpunkten mit den Scheiteltangenten, von denen die g_∞ eine ist. Und: Tangente und Normale eines Punktes der Parabel schneiden auf der Axe eine Strecke aus, deren Mitte der endliche Brennpunkt ist etc.

Berührt eine Curve C_m die g_∞ in mehreren Punkten, so kann der Zerfall einer oder mehrerer Fokalcurven herbeigeführt werden. Ist nämlich $k > 1$, so kann man zwei der Berührungspunkte der g_∞ zu conjugirten Punkten einer hyperbolisch-gleichseitigen quadratischen Punktinvolution der g_∞ wählen, für welche dann die betr. Fokalcurve in die g_∞ und eine Curve von der Ordnung

$$(m-1)(m-k)-1$$

zerfällt.

Berührt C_m die g_∞ in den unendlichen Kreispunkten k-mal ($k > 0$), sonst aber noch k'-mal, so bildet die g_∞ einen k^2-fachen Bestandtheil aller Fokalcurven, welche beliebigen hyperbolisch-gleichseitigen quadratischen Punktinvolutionen der g_∞ entsprechen, und die Ordnung der übrig bleibenden eigentlichen Fokalcurve, auf welcher die im Endlichen befindlichen $(m-3k-k')^2$ Brennpunkte der Curve C_m liegen, ist gleich

$$(m-1)(m-2k-k')-k^2.$$

Wählt man zwei der Punkte, in denen C_m die g_∞ ausserhalb der unendlichen Kreispunkte noch berührt, zu conjugirten Punkten einer hyperbolisch-gleichseitigen quadratischen Punktinvolution der g_∞, so entspricht ihr eine Fokalcurve, deren Ordnung um 1 geringer ist als die obige.

Ist jeder der beiden unendlichen Kreispunkte für C_m ein Wende- bez. Undulationspunkt, in welchem die g_∞ von dieser Curve k-punktig geschnitten wird, während sie die g_∞ anderweitig noch k'-mal berührt, so ist die g_∞ für diejenige Fokalcurve, welche einer beliebigen auf ihr befindlichen hyper-

bolisch-gleichseitigen quadratischen Punktinvolution entspricht, ein einfacher Bestandtheil, und die Ordnung der übrigbleibenden eigentlichen Fokalcurve ist gleich

$$(m-1)(m-2k-k'+2)-1,$$

etc.

Ist $m=3$ und berührt eine Curve C_3 die g_∞ in zwei Punkten P_∞, P'_∞, so bestimmen diese eine hyperbolisch-gleichseitige quadratische Punktinvolution, von deren Dupeln aus zwei Tangenten an C_3 gehen, welche t, t' heissen mögen. Die Verbindungsgerade ihrer Berührungspunkte ist auch eine Tangente t_* von C_3 und stellt mit der g_∞ die jener Involution entsprechende Fokalcurve vor. Der im Endlichen befindliche einzige reelle Brennpunkt der C_3 liegt also auf der Tangente t_*.

Da die dreispitzige Hypocycloide z. B. die g_∞ in den unendlichen Kreispunkten berührt, so stellt jede ihrer Tangenten zusammen mit der g_∞ eine Fokalcurve vor, d. h. sie hat keine im Endlichen befindlichen Brennpunkte. (Das Vorstehende folgt aus sehr bekannten Eigenschaften der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt.)

§ 4.

Die Orthogonale.

Der Ort der Scheitel der einer Curve m-ter Klasse C_m umbeschriebenen rechten Winkel, welchen wir ***Orthogonale*** nennen wollen, steht zu den Brennpunkten in einer innigen Beziehung und mag deswegen hier bestimmt werden. Wir denken uns daher auf der g_∞ diejenige quadratische Punktinvolution $(\mathfrak{J})^2_{**}$, welche die unendlichen Kreispunkte J, J' zu Dupeln hat und deshalb die ***circulare quadratische Punktinvolution der*** g_∞ heissen möge; denn sie spannt an jedem im Endlichen gelegenen Punkte eine circulare quadratische Strahleninvolution.

Zieht man von zwei conjugirten Punkten der $(\mathfrak{J})^2_{**}$ die Tangenten an C_m, so schneiden sich dieselben rechtwinklig in m^2 Punkten $\mathfrak{p}$, deren Ort die Orthogonale ist. Wenn C_m die g_∞ nicht berührt, so ist die Orthogonale von der Ordnung $m(m-1)$ und hat J, J' zu $\frac{1}{2}m(m-1)$-fachen Punkten. Sie passirt die $2m$ Punkte, in welchen C_m von denjenigen Tangenten berührt wird, welche von J, J' aus an sie gezogen werden können. Diese Punkte mögen als ***Fokalpunkte***, ihre Tangenten aber als ***Fokaltangenten*** bezeichnet werden.

Schneidet die Curve C_m, welche wir zunächst als allgemein voraussetzen wollen, die g_∞ in $m(m-1)$ Punkten

(1.) $$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{m(m-1)},$$

so wollen wir deren Tangenten, also die Asymptoten von C_m durch

(2.) $$t_1, t_2, \ldots, t_{m(m-1)}$$

bezeichnen, während die zu den Punkten (1.) conjugirten Punkte der Involution $(\mathfrak{J})^2_{**}$

(3.) $$\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_{m(m-1)}$$

heissen mögen.

Dann sind die Tangenten, welche von den Punkten (3.) an C_m gehen, zugleich auch Tangenten der Orthogonale, und die zugehörigen Berührungspunkte befinden sich auf derjenigen der Asymptoten (2.), welche denselben Index hat wie der betreffende der Punkte (3.). Dies folgt dualistisch aus dem in § 2 über die Curve $\Sigma_{\sigma *}$ Gesagten.

Hat die Curve C_m die g_∞ zur k-fachen Tangente, so ist die Orthogonale von der Ordnung $(m-1)(m-k)$ und hat die zu den Berührungspunkten der g_∞ conjugirten Punkte der $(\mathfrak{J})^2_{**}$ zu $(m-k)$-fachen, die unendlichen Kreispunkte aber zu $\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)$-fachen Punkten.

Berührt C_m die g_∞ nicht in den unendlichen Kreispunkten, so ist es für die Vielfachheit dieser Punkte in Bezug auf die Orthogonale gleichgültig, wie oft C_m die unendlichen Kreispunkte passirt.

Ist die g_∞ eine k-fache Tangente von C_m, und gehören die unendlichen Kreispunkte zu den Berührungspunkten, so sind diese

$$\left[\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)+1\right]\text{-fache}$$

Punkte der Orthogonale (vgl. § 2 die Curve $\Sigma_{\sigma *}$).

Unter Umständen kann die Orthogonale zerfallen. Zieht man z. B. in jedem Punkte einer beliebigen festen Curve n-ter Ordnung C^n die Tangenten der durch ihn gehenden beiden Kegelschnitte einer confokalen Schar, so umhüllen diese eine Curve $3n$-ter Klasse C_{3n}, welche die g_∞, die gemeinsamen Axen und Fokaltangenten jener Kegelschnittschar zu n-fachen Tangenten hat. Die Orthogonale der Curve C_{3n} zerfällt in C^n und eine Curve $3n(2n-1)$-ter Ordnung, welche die unendlichen Kreispunkte $n(2n-1)$-mal passirt.

§ 5.

Construction der Leitlinien einer ebenen algebraischen Curve beliebiger Klasse.

Die Verbindungslinie der zu einem Brennpunkte gehörigen Fokalpunkte möge seine *Leitlinie* heissen und durch $\mathfrak{L}$ bezeichnet werden. Dann ist es klar, dass eine Curve m-ter Klasse im allgemeinen m^2 Leitlinien hat, von denen höchstens m reell sind.

Um die Leitlinien einer gegebenen Curve m-ter Klasse C_m zu finden, nehmen wir auf der g_∞ irgend eine hyperbolisch-gleichseitige quadratische Punktinvolution $(\mathfrak{J})^2_*$ an, von der $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ ein Punktepaar sei. Von $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}'$) aus gehen m Tangenten t (t') an C_m, welche m Berührungspunkte $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}'$) besitzen. Verbindet man die m Punkte $\mathfrak{p}$ mit den m Punkten $\mathfrak{p}'$, so erhält man m^2 Gerade, welche durch l bezeichnet werden mögen. Während die Gruppe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ die Involution durchläuft, umhüllen die Geraden l eine Curve, welche eine *Leitliniencurve* von C_m heissen mag, denn sie berührt die m^2 Leitlinien von C_m. Nimmt man noch zwei andere beliebige hyperbolisch-gleichseitige quadratische Punktinvolutionen auf der g_∞ an, so entspricht einer jeden eine neue Leitliniencurve von C_m. Die so erhaltenen drei Leitliniencurven haben m^2 gemeinsame Tangenten, nämlich die Leitlinien der Curve C_m.

Wie bei den Fokalcurven erhält man reelle Tangenten einer Leitliniencurve ev. zunächst nur für reelle Punktepaare der betr. Involutionen. Doch kann man diese Leitliniencurven vollständig construiren, da man beliebig viele reelle Tangenten derselben bestimmen kann. Die Leitlinien von C_m berühren solche Theile der Leitliniencurven, welche man durch Ergänzung erhält.

Um die Klasse einer Leitliniencurve zu finden, mag zum Ausgangspunkt der Untersuchung dienen die dual gegenüberstehende

Aufgabe. Es ist eine Curve n-ter Ordnung m-ter Klasse C^n_m und eine Strahleninvolution 1. Ranges p-ten Grades $(J)^p$ gegeben. Die Tangenten, welche die Curve in ihren Schnittpunkten mit irgend einem Strahle der Involution hat, werden von denjenigen Tangenten, welche sie in ihren Schnittpunkten mit den zu jenem Strahle conjugirten besitzt, in Punkten getroffen, deren Ort gesucht wird.

Auflösung. Der Mittelpunkt O der Involution sei ein k-facher Punkt der Curve C^n_m. Wir bestimmen die Schnittpunkte des gesuchten Ortes, welcher durch $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden möge, mit einer beliebigen Geraden g. Von irgend einem Punkte $\mathfrak{g}$ derselben gehen m Tangenten t an die Curve C^n_m,

deren Berührungspunkte $\mathfrak{b}$ heissen mögen. Die Strahlen $O\mathfrak{b}$ bestimmen je eine Gruppe der Involution, deren übrige $p-1$ Strahlen die Curve C_m^n ausserhalb O in je $n-k$ Punkten treffen, deren Tangenten die Gerade g in $m(n-k)(p-1)$ Punkten $\mathfrak{g}'$ schneiden, die dem Punkte $\mathfrak{g}$ entsprechen. Umgekehrt entsprechen auch $m(n-k)(p-1)$ Punkte $\mathfrak{g}$ einem Punkte $\mathfrak{g}'$. Die Correspondenzcurve der beiden Punktreihen $(\mathfrak{g})$ und $(\mathfrak{g}')$ ist also von der Klasse

$$2m(n-k)(p-1).$$

Zu den Coincidenzpunkten der beiden Punktreihen gehören die $2(n-k)(p-1)$ Punkte $\mathfrak{g}_0$, in denen die Gerade g von den Tangenten getroffen wird, welche die Curve C_m^n in ihren ausserhalb O gelegenen Schnittpunkten $\mathfrak{p}_0$ mit den Dupeln der Involution hat. Dem Orte $\mathfrak{P}$, welcher offenbar durch die Punkte $\mathfrak{p}_0$ geht, gehören die Coincidenzpunkte $\mathfrak{g}_0$ nicht an, wohl aber die übrigen. Um ihre Anzahl zu erfahren, construiren wir die Correspondenzcurve und nehmen daher zwei beliebige feste Gerade c, c' an, deren Schnittpunkt $\mathfrak{M}$ sei. Die beiden Punktreihen $(\mathfrak{g})$, $(\mathfrak{g}')$ spannen in O zwei Strahlenbüschel, welche die Geraden c, c' beziehlich in den Punktreihen $(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}')$ schneiden mögen. Verbinden wir einen Punkt $\mathfrak{c}$ mit den ihm entsprechenden Punkten $\mathfrak{c}'$, so umhüllt die Gerade $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'$ die Correspondenzcurve, welche von der Klasse $2m(n-k)(p-1)$ ist. Diejenigen Tangenten, welche sich von O an die Correspondenzcurve ziehen lassen, schneiden die Gerade g in den Coincidenzpunkten der beiden Punktreihen $(\mathfrak{g})$, $(\mathfrak{g}')$. Nun ist zunächst klar, dass die Geraden, welche O mit den Punkten $\mathfrak{g}_0$ verbinden, einfache Tangenten der Correspondenzcurve sind. Im übrigen gehen aber nur ***Doppeltangenten*** von O aus an diese. Denn, ist z. B. $\mathfrak{g}_*$ ein Schnittpunkt des Ortes $\mathfrak{P}$ mit der Geraden g, so gehen von $\mathfrak{g}_*$ zwei Tangenten t_*, t'_* an die Curve C_m^n, deren Berührungspunkte $\mathfrak{b}_*$, $\mathfrak{b}'_*$ mit O verbunden zwei conjugirte Strahlen der Involution $(J)^p$ liefern. Nun fallen aber in den Punkt $\mathfrak{g}_*$, wenn man ihn zu der Punktreihe $(\mathfrak{g})$ rechnet, offenbar zwei entsprechende Punkte der Reihe $(\mathfrak{g}')$ hinein, und umgekehrt. Mithin ist $O\mathfrak{g}_*$ eine Doppeltangente der Correspondenzcurve, und es gehen von O an diese nur die erwähnten einfachen Tangenten $O\mathfrak{g}_0$ und

(1.) $$(m-1)(n-k)(p-1)$$

Doppeltangenten, welche die Gerade g in denjenigen Coincidenzpunkten der beiden Punktreihen $(\mathfrak{g})$, $(\mathfrak{g}')$ treffen, in welchen der Ort $\mathfrak{P}$ die Gerade g schneidet.

Der Ort $\mathfrak{P}$, dessen Ordnung also gleich (1.) ist, geht durch diejenigen $k(n-k)(p-1)$ Punkte, in welchen die k Tangenten, welche C_m^n in O besitzt, beziehlich von den Tangenten der ausserhalb O befindlichen Schnittpunkte der Curve mit den zu jenen k Tangenten conjugirten Strahlen der Involution getroffen werden.

Es sei d ein Dupel der Involution $(J)^p$, welches die Curve C_m^n ausserhalb O in den $n-k$ Punkten

(2.) $$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_{n-k}$$

trifft, deren Tangenten

(3.) $$t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$$

heissen mögen. Dann geht der Ort $\mathfrak{P}$, wie oben erwähnt, durch die $n-k$ Punkte (2.) und durch die gegenseitigen $\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)$ Schnittpunkte P der Tangenten (3.). Die Tangente des Ortes $\mathfrak{P}$ in einem Punkte P, in welchem sich zwei Tangenten t_1, t_2 schneiden, trennt diese mit dem Strahle OP harmonisch, was man durch eine Infinitesimalbetrachtung leicht erkennt. Die Tangenten, welche die Curve C_m^n in den $(n-k)(p-2)$ Punkten hat, wo sie ausserhalb O von den zu d conjugirten $p-2$ Strahlen der Involution $(J)^p$ geschnitten wird, berühren den Ort $\mathfrak{P}$ offenbar je $(n-k)$-mal und zwar in den Schnittpunkten mit den Tangenten (3.). Berührt das Dupel d die Curve C_m^n in O, so fällt einer der Punkte (2.) in O hinein.

Sind k' Tangenten des Punktes O conjugirte Strahlen der Involution $(J)^p$, so ist O ein $\frac{1}{2}k'(k'-1)$-facher Punkt des Ortes $\mathfrak{P}$.

Werden λ Tangenten

(4.) $$t_1, t_2, \ldots, t_\alpha, \ldots, t_\beta, \ldots, t_\lambda$$

des Punktes O von je

(5.) $$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_\beta, \ldots, \mathfrak{z}_\lambda$$

Zweigen der Curve C_m^n berührt, und gehören die Tangenten (4.) einer und derselben Gruppe der Involution an, so ist O ein

$$[\mathfrak{z}_1(\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3+\cdots+\mathfrak{z}_\lambda)+\mathfrak{z}_2(\mathfrak{z}_3+\mathfrak{z}_4+\cdots+\mathfrak{z}_\lambda)+\cdots+\mathfrak{z}_{\lambda-1}\cdot\mathfrak{z}_\lambda]\text{-facher}$$

Punkt des Ortes $\mathfrak{P}$, und eine Tangente t_α wird von den Tangenten der $n-k-\mathfrak{z}_\beta$ Punkte, in denen eine Tangente t_β die Curve C_m^n ausserhalb O noch schneidet, in $\mathfrak{z}_\alpha$-fachen Punkten des Ortes $\mathfrak{P}$ getroffen.

Diejenigen $m-2k$ Tangenten t_*, welche sich, ohne in O zu berühren, von diesem Punkte aus an C_m^n ziehen lassen, werden von den betr. Tangenten

τ der ausserhalb O befindlichen Schnittpunkte von C_m^n mit den zu jenen Tangenten t_* conjugirten Strahlen der Involution in $(m-2k)(n-k)(p-1)$ Punkten $\mathfrak{p}_*$ des Ortes $\mathfrak{P}$ getroffen, und dieser berührt in ihnen je die betr. Tangente τ.

Besitzt die Curve C_m^n eine vielfache Tangente τ_*, von deren Berührungspunkten λ auf conjugirten Strahlen der Involution $(J)^p$ liegen, so gehört die $\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)$-fach zu rechnende Gerade τ_* dem Orte $\mathfrak{P}$ an.

Hat C_m^n einen mehrfachen Punkt P_*, von dessen Tangenten ε in eine zusammenfallen, welche s heissen möge, so sind die Tangenten der Curve in ihren ausserhalb O befindlichen Schnittpunkten mit den zu OP_* conjugirten Strahlen der Involution $(\varepsilon-1)$-fache Tangenten des Ortes $\mathfrak{P}$, welchen sie auf der Geraden s, in ε Punkten schneidend, berühren.

Offenbar sind in der Zahl (1.), welche die Ordnung des Ortes $\mathfrak{P}$ ausdrückt, bereits alle durch Singularitäten der Curve C_m^n entstehenden Reductionen enthalten. Auf weitere specielle Fälle und Singularitäten des Ortes $\mathfrak{P}$ einzugehen ist für den vorliegenden Zweck unnöthig.

Setzt man in der Zahl (1.) dieses Paragraphen $p = 2$, so erhält man die Klasse der Leitliniencurven einer Curve m-ter Klasse n-ter Ordnung C_m^n, indem man in jener Zahl m und n mit einander vertauscht, gleich

$$(6.) \qquad (m-k)(n-1),$$

wo k die Multiplicität der g_∞ für die Curve C_m^n bezeichnet. Besitzt die Curve C_m^n einen vielfachen Punkt, so kann man die unendlichen Punkte zweier Tangenten desselben als Gruppe einer hyperbolisch-gleichseitigen quadratischen Punktinvolution der g_∞ wählen, für welche dann die Leitliniencurve in jenen Punkt und eine echte Curve zerfällt.

Denkt man sich jetzt die Leitlinien und die Brennpunkte einer Curve m-ter Klasse n-ter Ordnung C_m^n construirt, so muss noch bestimmt werden, welchem Brennpunkte eine jede Leitlinie zugehört. Zu dem Zweck nehmen wir auf einer bestimmten Leitlinie $\mathfrak{L}$ einen beliebigen Punkt Q an. Ein Strahl q desselben trifft die Curve C_m^n in n Punkten $\mathfrak{q}$, deren Tangenten sich paarweise in $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkten schneiden, deren Ort, während der Strahl q sich um den Punkt Q dreht, eine Curve I^γ von der Ordnung γ ist. Diese Curve geht durch den zu der Leitlinie $\mathfrak{L}$ gehörigen Brennpunkt der Curve C_m^n, denn $\mathfrak{L}$ ist ein Strahl von Q. (Offenbar lässt

sich die Zugehörigkeit auch durch eine dual gegenüberstehende Betrachtung feststellen).

Die Ordnung γ habe ich in Bd. 123 dieses Journals auf S. 190 bestimmt, und zwar ist

$$(7.) \qquad \gamma = \frac{1}{2}\left[m(2n-3)-\varkappa-\mathfrak{S}\right] = \frac{1}{2}\left[n(2m-3)-\iota-\mathfrak{B}\right],$$

wo ι die Anzahl der Wendepunkte, $\varkappa$ diejenige der Rückkehrpunkte der Curve C_m^n, und

$$(8.) \qquad \mathfrak{S} = (\sigma_1-1)+(\sigma_2-1)+\cdots,$$

$$(9.) \qquad \mathfrak{B} = (\nu_1-1)+(\nu_2-1)+\cdots$$

ist. Hier bedeuten

$$(10.) \qquad \sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

die Anzahlen zusammenfallender Tangenten vielfacher Punkte der Curve C_m^n, während

$$(11.) \qquad \nu_1, \nu_2, \ldots$$

die Anzahlen der zusammenfallenden Berührungspunkte vielfacher Tangenten der Curve C_m^n bezeichnen, jedoch so, dass sich auch mehrere der Zahlen (10.) oder (11.) auf einen einzigen vielfachen Punkt oder auf eine einzige vielfache Tangente beziehen dürfen.

Die Leitlinien der Kegelschnitte ergeben sich als die reciproken Polaren ihrer Brennpunkte.*)

Zweiter Fall.

§ 6.

In dem zweiten Falle wählen wir für die circulare Curve C_*^q einen beliebigen festen Kreis $\mathfrak{C}^2$ und für die circulare Curve C_*^n die g_∞.

Die Curvenreihe n-ter Ordnung, welcher die g_∞ angehört, besteht jetzt offenbar aus den Strahlen eines beliebigen Punktes P_∞ der g_∞. Mithin haben wir folgende Construction: Zu einer beliebigen Richtung ziehe man die Parallelstrahlen p, welche den Kreis $\mathfrak{C}^2$ in je zwei Punkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ treffen mögen. Von diesen gehen an die Curve C_m je m Tangenten, welche einander in m^2 Punkten $\mathfrak{a}$ schneiden. Während sich der Strahl p parallel

*) Der in diesem Paragraphen behandelte Ort $\mathfrak{P}$ ist nur ein specieller Fall der sich ergebenden von mir untersuchten Curve, wenn für die Involution $(J)^p$ eine beliebige Curvenreihe gesetzt wird.

verschiebt, beschreiben die Punkte $\mathfrak{a}$ eine Fokalcurve Φ, welche durch die Brennpunkte von C_m geht.

Zur Bestimmung der Ordnung dieser Curve suchen wir ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden g auf. Zu dem Zweck ziehen wir von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{g}$ der Geraden g an C_m die m Tangenten t, welche den Kreis in $2m$ Punkten $\mathfrak{p}$ treffen. Diese liefern paarweise mit einander verbunden

$$2m(m-1)$$

Gerade, welche ***nicht*** durch den Punkt $\mathfrak{g}$ gehen und durch τ bezeichnet werden mögen.

Während der Punkt $\mathfrak{g}$ die Gerade g durchläuft, umhüllen die Geraden τ eine Curve von der Klasse $2m(m-1)$, denn so viele Gerade τ gehen von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}$ des Kreises $\mathfrak{C}^2$ aus. Es lassen sich nämlich von $\mathfrak{p}$ aus m Tangenten t an C_m legen. Jede derselben trifft die Gerade g in einem Punkte $\mathfrak{g}'$, von welchem sich an C_m noch $m-1$ Tangenten ziehen lassen, deren $2(m-1)$ Schnittpunkte mit dem Kreise $\mathfrak{C}^2$ ebenso viele Tangenten τ in $\mathfrak{p}$ spannen. Also ist die Klasse der von den Geraden τ eingehüllten Curve gleich $2m(m-1)$. Wir wollen diese Curve T nennen. Sie hat die Eigenthümlichkeit, dass jede ihrer Tangenten den Kreis $\mathfrak{C}^2$ in zwei Punkten trifft, die an die Curve C_m Tangenten entsenden, von denen zwei sich in einem Punkte $\mathfrak{g}$ der Geraden g kreuzen.

Nun gehen von P_∞ aus an die Curve T

$$2m(m-1)$$

Tangenten τ, denen auf g eben so viele Punkte $\mathfrak{g}$ der Curve Φ entsprechen. Denn von jedem dieser Punkte $\mathfrak{g}$ gehen an C_m Tangenten, denen solche Gerade τ entsprechen, von welchen eine durch den Punkt P_∞ läuft. Mithin ist die Ordnung der Fokalcurve Φ gleich der Klasse der Curve T.

Aendert man den Punkt P_∞ zwei Mal auf der g_∞ (oder behält man den Punkt P_∞ bei und ändert den Kreis $\mathfrak{C}^2$ zwei Mal), so erhält man zwei neue Curven Φ', Φ'', welche mit Φ zusammen durch die m^2 Brennpunkte der Curve C_m gehen.

Da diese zweite Methode der Construction der Brennpunkte geringeres Interesse bietet (bei der Parabel z. B. würde der im Endlichen befindliche Brennpunkt als gemeinsamer Schnittpunkt von drei Curven vierter Ordnung oder als Schnittpunkt der Axe mit zwei Curven vierter Ordnung zu be-

stimmen sein), so wollen wir die besonderen Fälle sowie die sich anschliessende Construction der Leitlinien hier übergehen und uns zu der metrischen Behandlung der Centralkegelschnitte wenden.

Um ein bequemes Resultat zu erhalten, muss dafür gesorgt werden, dass für einen Centralkegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ die Fokalcurve vierter Ordnung zerfällt. Hierzu genügt es, dass der Mittelpunkt M des Kreises $\mathfrak{C}^2$ auf der einen Axe (welche wir der Kürze wegen die *erste* nennen wollen), und der Punkt P_∞ auf der anderen *zweiten* Axe von $\mathfrak{K}^2$ liegt, der Kreis $\mathfrak{C}^2$ jedoch eine solche Lage annimmt, dass mindestens von einem Theile desselben reelle Tangenten an $\mathfrak{K}^2$ gehen.

Die Schnittpunkte des Kreises $\mathfrak{C}^2$ mit der ersten Axe mögen C, C' heissen. Dann besteht die Fokalcurve Φ aus der doppelt zu rechnenden ersten Axe und einem Kegelschnitte K^2, welcher durch die auf der zweiten Axe befindlichen Brennpunkte von $\mathfrak{K}^2$ geht. Der Kegelschnitt K^2 ist nie eine Parabel, sondern stets ein Centralkegelschnitt, der allerdings, wie wir später sehen werden, in ein Paar Gerade ausarten kann, welche eine Hyperbel vorstellen.

Die beiden Kegelschnitte K^2 und $\mathfrak{K}^2$ haben die erste Axe des letzteren gemeinsam. Die Polaren der Punkte C, C' in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$ treffen diesen Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit K^2, welcher noch durch die vier Punkte geht, in welchen der Kreis $\mathfrak{C}^2$ von den Scheiteltangenten der ersten Axe des Centralkegelschnittes $\mathfrak{K}^2$ getroffen wird. Ferner trifft K^2 die erste Axe von $\mathfrak{K}^2$ in zwei Punkten, deren Polaren in Bezug auf diesen Kegelschnitt durch je zwei Schnittpunkte gehen, welche er mit $\mathfrak{C}^2$ gemein hat.

Die unendlichen Punkte von K^2 liegen auf den Tangenten, welche von einem Schnittpunkte der zweiten Axe mit $\mathfrak{C}^2$ an $\mathfrak{K}^2$ gehen. Damit kennen wir 14 Punkte des Kegelschnittes K^2.

Liegen $\mathfrak{C}^2$ und $\mathfrak{K}^2$ concentrisch, so sind K^2 und $\mathfrak{K}^2$ coaxial. Befindet sich also der Punkt P_∞ auf der *grossen* (*reellen*) Axe des Kegelschnittes $\mathfrak{K}^2$, so sind dessen reelle Brennpunkte die auf dieser Axe befindlichen Scheitel von K^2.

Ist der Kreis $\mathfrak{C}^2$ insbesondere die Orthogonale von $\mathfrak{K}^2$, so ist K^2 diejenige gleichseitige Hyperbel, deren Scheitel die reellen Brennpunkte von $\mathfrak{K}^2$ sind, und welche ausserdem durch die imaginären Brennpunkte dieses

Kegelschnittes geht. Man erkennt leicht, dass in diesem Falle bei der Construction die Axen von $\mathfrak{K}^2$ vertauschbar sind.

Merkwürdig ist der Fall, wo der Kreis $\mathfrak{C}^2$ seinen Mittelpunkt auf der ersten Axe hat und durch die auf der zweiten Axe befindlichen Brennpunkte von $\mathfrak{K}^2$ geht. Alsdann ist nämlich K^2 identisch mit $\mathfrak{C}^2$, weil K^2 erstens ein Kreis ist (da sich auf $\mathfrak{C}^2$ zwei Brennpunkte von $\mathfrak{K}^2$ befinden), zweitens aber durch die vier Punkte geht, in welchen $\mathfrak{C}^2$ von den Scheiteltangenten der ersten Axe des Kegelschnittes $\mathfrak{K}^2$ getroffen wird.

Liegt der Kreis $\mathfrak{C}^2$ *ganz innerhalb* des Centralkegelschnittes $\mathfrak{K}^2$, so geht K^2 durch dieselben 14 Punkte wie oben, er entspricht aber den imaginären Punktepaaren des Kreises $\mathfrak{C}^2$, welche auf Parallelen zur zweiten Axe liegen.

§ 7.

Metrische Construction der reellen Brennpunkte eines Centralkegelschnittes.

Behufs metrischer Bestimmung der reellen Brennpunkte muss jetzt zur Vermeidung lästiger Rechnungen der totale Zerfall der Fokalcurve herbeigeführt werden.

Dem Kreisbüschel $(\mathfrak{C})^2$, dessen Individuen ihren Mittelpunkt auf der kleinen (imaginären) Axe von $\mathfrak{K}^2$ haben und sich in einem Punkte C derselben berühren, entspricht ein Kegelschnittbüschel $(K)^2$, dessen Grundpunkte die beiden reellen Brennpunkte F, F' von $\mathfrak{K}^2$ und die beiden Punkte P, P' sind, in welchen $\mathfrak{K}^2$ von der Polaren des Punktes C geschnitten wird. Berührt nun ein Kreis $\mathfrak{C}_*^2$ des Büschels $(\mathfrak{C})^2$ den Centralkegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ doppelt, so entspricht ihm in dem Kegelschnittbüschel $(K)^2$ ein Kegelschnitt K_*^2, der in zwei Gerade zerfällt. Dieselben gehen durch die Punkte F, F', P, P' und kreuzen sich in demjenigen Punkte D der kleinen (imaginären) Axe, welcher der Pol der Berührungssehne s_* ist. Sind die beiden Punkte P, P' reell, so repräsentiren diejenigen Doppelpunkte des Kegelschnittbüschels $(K)^2$, welche auf der kleinen (imaginären) Axe liegen, zwei Punkte D, welche unserem Zwecke dienen.

Der Kreis $\mathfrak{C}_*^2$ trifft die grosse (reelle) Axe von $\mathfrak{K}^2$ in zwei Punkten, von welchen an diesen Kegelschnitt zwei Tangenten gehen, die den Geraden DF, DF' parallel sind etc. (Offenbar giebt es zwei Kreise $\mathfrak{C}_*^2$.)

Um die Construction zu erleichtern, wählen wir für $\mathfrak{C}_*^2$ den über der grossen (reellen) Axe von $\mathfrak{K}^2$ als Durchmesser beschriebenen Kreis.

1. ***Construction der reellen Brennpunkte der Ellipse.***

Die Längen der grossen und der kleinen Halbaxe einer Ellipse seien a, b. Die Scheitel der grossen Axe mögen A, A', die der kleinen Axe B, B' heissen. $\mathfrak{C}_*^2$ sei der über der grossen Axe als Durchmesser beschriebene Kreis. Dann besteht der Kegelschnitt K_*^2 aus den in den reellen Brennpunkten F, F' auf der grossen Axe errichteten beiden Senkrechten. Dieselben gehen durch die Schnittpunkte des Kreises $\mathfrak{C}_*^2$ mit den Scheiteltangenten der kleinen Axe der Ellipse, und es ist daher, wenn O deren Mittelpunkt bezeichnet,

$$\overline{OF} = \overline{OF'} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

2. ***Construction der reellen Brennpunkte der Hyperbel.***

Es sei O der Mittelpunkt einer Hyperbel, deren Scheitel A, A' heissen mögen. Ueber der reellen Axe AA' als Durchmesser beschreiben wir einen Kreis $\mathfrak{C}_*^2$. Dann zerfällt der Kegelschnitt K_*^2 wieder in die beiden Senkrechten g, g', welche in den reellen Brennpunkten F, F' auf der reellen Axe errichtet werden können. Nun seien C, C' die Schnittpunkte des Kreises $\mathfrak{C}_*^2$ mit einer Asymptote der Hyperbel. Dann gehen die Geraden g, g' beziehlich durch diejenigen Punkte E, E', in denen die andere Asymptote von den Tangenten geschnitten wird, die von C, C' aus noch an die Hyperbel gezogen werden können. Sind jetzt a, b die Längen der Halbaxen der Hyperbel, und ist 2φ der Winkel, welchen die Asymptoten mit einander bilden, so ist

$$\triangle COE = ab = \frac{1}{2}\, a \cdot \overline{OE} \cdot \sin 2\varphi,$$

oder

$$\overline{OE} = \frac{b}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}, \qquad \text{und} \qquad \overline{OF} = \overline{OF'} = \overline{OE} \cdot \cos\varphi = \frac{b}{\sin\varphi}.$$

Nun ist

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \text{also} \qquad \overline{OF} = \overline{OF'} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dieses Resultat folgt nach dem in § 3 mitgetheilten Satze auch kürzer aus dem Umstande, dass die Asymptoten von den Scheiteltangenten in den Ecken eines Rechtecks geschnitten werden, dessen umbeschriebener Kreis durch die reellen Brennpunkte geht.

Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage.

(Von Herrn *J. Horn* in Clausthal.)

Die Lage eines Systems von n Freiheitsgraden, dessen Verbindungen von der Zeit t nicht abhängen, sei durch die n Coordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt, welche in der stabilen Gleichgewichtslage O sämmtlich verschwinden. Es sei eine nur von den Coordinaten abhängige Kräftefunction U vorhanden, welche in der Umgebung der Lage O in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$ entwickelbar ist:

$$U = \sum_{m=2}^{\infty} U_m;$$

U_m sei eine ganze homogene Function m-ten Grades von $x_1, \ldots, x_n$ und U_2 eine definite negative quadratische Form. Die lebendige Kraft T ist eine positive homogene Function zweiten Grades von

$$x'_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

deren Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ als Potenzreihen von $x_1, \ldots, x_n$ vorausgesetzt werden:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

Durch Einführung von Hauptcoordinaten $x_1, \ldots, x_n$ (d. h. durch lineare Transformation der ursprünglichen Coordinaten) erreicht man, dass

$$U_2 = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 x_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 x_n^2); \qquad \lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$$

und dass für $x_1 = \ldots = x_n = 0$ $A_{\alpha\alpha} = 1$, $A_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \leqslant \beta)$ wird. Die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

bringen wir durch Auflösung nach

$$x_\alpha'' = \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

auf die Form

$$x_\alpha'' + \lambda_\alpha^2 x_\alpha = F_\alpha(x_1', \ldots, x_n';\ x_1, \ldots, x_n) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n), \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

worin F_α eine quadratische Form von $x_1', \ldots, x_n'$ ist, deren Coefficienten Potenzreihen von $x_1, \ldots, x_n$ sind, und G_α eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$, welche mit quadratischen Gliedern beginnt.*)

In der üblichen Theorie der kleinen Schwingungen giebt man den Differentialgleichungen der Bewegung unter Beschränkung auf die linearen Glieder die Gestalt

$$x_\alpha'' + \lambda_\alpha^2 x_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n);$$

man hat ohne weiteres die Lösung

$$x_\alpha = k_\alpha \cos(\lambda_\alpha t + l_\alpha) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

mit den $2n$ Constanten $k_1, \ldots, k_n;\ l_1, \ldots, l_n$.

Die unveränderten *Lagrange*schen Gleichungen werden im allgemeinen (d. h. wenn keine Relation $g_1 \lambda_1 + \cdots + g_n \lambda_n = 0$ mit ganzzahligen Coefficienten $g_1, \ldots, g_n$ besteht) formell befriedigt, wenn man für x_α eine Potenzreihe von n Integrationsconstanten $k_1, \ldots, k_n$ setzt, deren Coefficienten periodische Functionen von n Argumenten $u_1, \ldots, u_n$ mit der Periode 2π in Bezug auf jedes dieser Argumente sind; es ist

$$u_\alpha = \varrho_\alpha t + l_\alpha = (\lambda_\alpha + \varrho_\alpha^{(2)} + \varrho_\alpha^{(4)} + \cdots) t + l_\alpha,$$

wo $\varrho_\alpha^{(2)}, \varrho_\alpha^{(4)}, \ldots$ ganze homogene Functionen 2., 4., ... Dimension in Bezug auf $k_1, \ldots, k_n$ sind, während $l_1, \ldots, l_n$ neue Integrationsconstante darstellen. Die Reihe für x_α enthält ausser dem Anfangsglied $k_\alpha \cos u_\alpha$ nur Glieder zweiten und höheren Grades in Bezug auf $k_1, \ldots, k_n$. In den Reihengliedern treten Divisoren von der Gestalt $g_1 \lambda_1 + \cdots + g_n \lambda_n$ auf, wo $g_1, \ldots, g_n$ positive und negative ganze Zahlen sind; unter diesen Divisoren kommen beliebig kleine vor. Auf die formale Berechnung dieser Reihen und ihre Ueberführung in andere Formen wird im zweiten Theile des vorliegenden Aufsatzes eingegangen, wo sich auch Litteraturangaben finden.

---

*) Vgl. § 1 des Aufsatzes des Verf. „Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen“ (Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 48).

Der erste Theil beschäftigt sich mit kleinen Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts für eine specielle Klasse dynamischer Probleme, welche von ***Liouville*** und ***Stäckel*** betrachtet wurde und welche sich auf Quadraturen zurückführen lässt. Es sei nämlich

$$\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha) \qquad (\alpha,\beta=1,\ldots,n)$$

eine Potenzreihe von x_α, welche in der Nähe von $x_\alpha = 0$ convergirt; die Determinante

$$\Phi = \underset{(\alpha,\beta=1,\ldots,n)}{|\varphi_{\alpha\beta}|} = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha 1}\,\Phi_\alpha$$

und die Unterdeterminanten $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ sollen für $x_1 = \ldots = x_n = 0$ von Null verschieden sein; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass die n Brüche $\frac{\Phi_\alpha}{\Phi}$ für $x_1 = \ldots = x_n = 0$ den Werth 1 annehmen. Ferner sei

$$\psi_\alpha(x_\alpha) = -\frac{1}{2}\,\lambda_\alpha^2\,x_\alpha^2 + \cdots; \qquad \lambda_\alpha > 0$$

eine in der Nähe von $x_\alpha = 0$ convergente Potenzreihe von x_α, welche ausser dem angeschriebenen quadratischen Glied nur Glieder höheren Grades enthält. Unser System habe die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_\alpha}\,x_\alpha'^2;$$

und es sei die Kräftefunction

$$U = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Phi_\alpha}{\Phi}\,\psi_\alpha$$

vorhanden. Wie in dem allgemeineren Falle bestehen Potenzreihenentwicklungen

$$T = \frac{1}{2}\,(x_1'^2 + \cdots + x_n'^2) + \cdots,$$

$$U = -\frac{1}{2}\,(\lambda_1^2\,x_1^2 + \cdots + \lambda_n^2\,x_n^2) + \cdots,$$

sodass $x_1, \ldots, x_n$ Hauptcoordinaten sind und $x_1 = \ldots = x_n = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage ist. Aus der von ***Staude*** für $n = 2$ entwickelten und von ***Stäckel*** auf beliebiges n übertragenen Theorie der bedingt periodischen Functionen ergiebt sich die Darstellung von $x_1, \ldots, x_n$ als Functionen von t und $2n$ Integrationsconstanten. Die so gewonnenen Reihen, deren Convergenz aus der Art ihrer Herleitung hervorgeht, sind von derselben Form wie die

im allgemeineren Falle durch formale Rechnung erhaltenen Reihen, sie sind aber insofern wesentlich einfacher, als die kleinen Divisoren fortfallen. Durch besondere Wahl der Integrationsconstanten ergeben sich die in der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage verlaufenden periodischen Bewegungen. — Als Beispiel dient die Bewegung eines schweren Punktes in der Nähe der tiefsten Stelle eines elliptischen Paraboloids mit lothrechter Achse.

Hauptzweck des vorliegenden Aufsatzes ist die Behandlung des speciellen Falles im ersten Theil; die formale Herleitung der allgemeineren Reihen im zweiten Theil dient hier nur zur Vergleichung.

Erster Theil.

§ 1.

Die Potenzreihen

$$\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha) = a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}\, x_\alpha + a''_{\alpha\beta}\, x_\alpha^2 + \cdots \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

und

$$2\psi_\alpha(x_\alpha) = -\lambda_\alpha^2\, x_\alpha^2 + s'_\alpha\, x_\alpha^3 + s''_\alpha\, x_\alpha^4 + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

worin $\lambda_\alpha > 0$ vorausgesetzt wird, seien für hinreichend kleine Werthe von $|x_\alpha|$ convergent. Wenn die Determinante

$$\Delta = |a_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

und die Unterdeterminanten $\Delta_{\alpha 1}\,(\alpha = 1, \ldots, n)$ der Elemente $a_{\alpha 1}$ von Null verschieden sind, können wir, wie am Schluss von § 1 gezeigt wird, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sämmtliche Grössen $a_{\alpha\beta}\,(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ von Null verschieden und sämmtliche n Quotienten

$$\frac{\Delta_{\alpha 1}}{\Delta} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

gleich 1 annehmen. Dann lässt sich

$$\Phi = \underset{(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)}{|\varphi_{\alpha\beta}|} = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha 1}\, \Phi_\alpha$$

in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Anfangsglied Δ, Φ_α in eine Potenzreihe mit dem Anfangsglied $\Delta_{\alpha 1}$ entwickeln, also $\frac{\Phi_\alpha}{\Phi}$ in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$, welche für $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ den Werth 1 annimmt. Mithin ist

$$U = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Phi_\alpha}{\Phi}\, \psi_\alpha = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2\, x_1^2 + \cdots + \lambda_n^2\, x_n^2) + \cdots$$

eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$, welche ausser den angeschriebenen Gliedern nur solche höheren als zweiten Grades enthält; in

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_\alpha} x_\alpha'^2$$

ist $\frac{1}{2} x_\alpha'^2$ mit einer Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Anfangsglied 1 multiplicirt.

Die *Hamilton-Jacobi*sche partielle Differentialgleichung lautet unter den gemachten Voraussetzungen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Phi_\alpha}{\Phi} \left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 - 2\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Phi_\alpha}{\Phi} \psi_\alpha + h_1\right) = 0;$$

sie besitzt die Lösung

$$W = \sum_{\alpha=1}^{n} \int \sqrt{F_\alpha(x_\alpha)}\, dx_\alpha,$$

wo

$$F_\alpha(x_\alpha) = 2\psi_\alpha(x_\alpha) + 2 \sum_{\beta=1}^{n} h_\beta \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)$$

gesetzt ist. Daraus folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial h_1} = t + H_1,$$

$$\frac{\partial W}{\partial h_\beta} = H_\beta \qquad (\beta = 2, \ldots, n)$$

oder

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int \frac{\varphi_{\alpha 1}(x_\alpha)}{\sqrt{F_\alpha(x_\alpha)}}\, dx_\alpha = t + H_1,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int \frac{\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)}{\sqrt{F_\alpha(x_\alpha)}}\, dx_\alpha = H_\beta \qquad (\beta = 2, \ldots, n)$$

mit den Integrationsconstanten

$$h_1, \ldots, h_n;\ H_1, \ldots, H_n.^*)$$

Wir beweisen die beiden über $a_{\alpha\beta}$ und $\frac{\Delta_{\alpha 1}}{\Delta}$ aufgestellten Behauptungen.

1. Unter der Annahme, dass die Determinante Φ sowie die Unterdeterminanten $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ für $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ von Null verschieden sind,

---

*) *Stäckel*, über die Integration der *Hamilton-Jacobi*schen Differentialgleichung mittels Separation der Variablen (Habilitationsschrift, Halle 1891). — Dargestellt in *Charlier*, Mechanik des Himmels, Bd. I, S. 77 ff. — Vgl. auch *Liouville*, Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels (*Liouville*s Journal 1849, besonders S. 286—290). — Ferner Noten in den Comptes rendus von *Stäckel* (Bd. 116, S. 485 u. 1284; Bd. 121, S. 489) und *Goursat* (Bd. 116, S. 1050); sowie *Stäckel*, Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit (Math. Ann. Bd. 42).

kann man, ohne T und U zu ändern, die $\varphi_{\alpha\beta}$ so abändern, dass sämmtliche $\varphi_{\alpha\beta}(0)$ von Null verschieden sind.

Ist nämlich ein Element $\varphi_{\alpha n}(0)$ der n-ten Zeile von Δ gleich Null, so ersetzt man die n Elemente $\varphi_{\alpha n}(x_\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ der n-ten Zeile von Φ durch

$$\bar{\varphi}_{\alpha n}(x_\alpha) = \varphi_{\alpha n}(x_\alpha) + \varkappa_1 \varphi_{\alpha, n-1}(x_\alpha) + \cdots + \varkappa_{n-2} \varphi_{\alpha 2}(x_\alpha),$$

wo $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2}$ beliebige Constante sind. Da $\varphi_{\alpha 2}(0), \ldots, \varphi_{\alpha, n-1}(0)$, $\varphi_{\alpha n}(0)$ nicht sämmtlich verschwinden können, so ist $\bar{\varphi}_{\alpha n}(0)$ von Null verschieden, wenn specielle Werthe von $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2}$ ausgeschlossen werden. Sind nun $\varphi_{1n}(0), \ldots, \varphi_{nn}(0)$ sämmtlich von Null verschieden, ist aber z. B. $\varphi_{\alpha\beta}(0) = 0$, wo β eine der Zahlen $2, \ldots, n-1$ ist, so ersetzt man die n Elemente der β-ten Zeile $\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)(\alpha = 1, \ldots, n)$ durch

$$\bar{\varphi}_{\alpha\beta}(x_\alpha) = \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha) + \varkappa \varphi_{\alpha n}(x_\alpha).$$

Schliesst man specielle Werthe der Constanten $\varkappa$ aus, so sind $\bar{\varphi}_{1\beta}(0), \ldots, \bar{\varphi}_{n\beta}(0)$ sämmtlich von Null verschieden.

2. Ohne T und U zu ändern, kann man die x_α, sowie die $\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ und $\psi_\alpha(x_\alpha)$ so abändern, dass $\frac{\Phi_\alpha}{\Phi}$ für die Nullwerthe der Coordinaten den Werth 1 annimmt.

Da T stets positiv ist, müssen die n Grössen

$$\frac{\Delta}{\Delta_{\alpha 1}} = \frac{1}{g_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

positiv sein. Wir führen an Stelle der x_α die neuen Coordinaten

$$\bar{x}_\alpha = \frac{x_\alpha}{\sqrt{g_\alpha}}$$

ein und setzen

$$\bar{\varphi}_{\alpha\beta}(\bar{x}_\alpha) = g_\alpha \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha),$$

$$\bar{\psi}_\alpha(\bar{x}_\alpha) = g_\alpha \psi_\alpha(x_\alpha) = -\frac{1}{2} \bar{\lambda}_\alpha^2 \bar{x}_\alpha^2 + \cdots,$$

wo $\bar{\lambda}_\alpha = g_\alpha \lambda_\alpha$ ist. Unter Einführung der Bezeichnung

$$\bar{\Phi} = |\bar{\varphi}_{\alpha\beta}| = \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{\varphi}_{\alpha 1} \bar{\Phi}_\alpha$$

hat man

$$\frac{\bar{\Phi}}{\bar{\Phi}_\alpha} = g_\alpha \frac{\Phi}{\Phi_\alpha}.$$

Nun ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\Phi\, g_\alpha}{\Phi_\alpha} \bar{x}_\alpha'^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\Phi}_\alpha} \bar{x}_\alpha'^2$$

und

$$U = \sum_{\alpha} \frac{\Phi_\alpha}{\Phi\, g_\alpha} \cdot g_\alpha \psi_\alpha = \sum_{\alpha} \frac{\bar{\Phi}_\alpha}{\bar{\Phi}} \bar{\psi}_\alpha .$$

Da $\frac{\Phi\, g_\alpha}{\Phi_\alpha}$ in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Anfangsglied $\frac{g_\alpha \Delta}{\Delta_{\alpha 1}} = 1$ entwickelbar ist, so ist $\frac{\bar{\Phi}_\alpha}{\bar{\Phi}}$ eine Potenzreihe von $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ mit dem Anfangsglied 1. Somit ist

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \bar{\lambda}_\alpha^2 \bar{x}_\alpha^2 + \cdots .$$

War keine der Grössen $\varphi_{\alpha\beta}(0)$ gleich Null, so sind auch sämmtliche Grössen $\bar{\varphi}_{\alpha\beta}(0)$ von Null verschieden.

§ 2.

Die Function

$$F_\alpha(x_\alpha) = -\lambda_\alpha^2 x_\alpha^2 + s'_\alpha x_\alpha^3 + s''_\alpha x_\alpha^4 + \cdots + 2 \sum_{\beta=1}^{n} h_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta} x_\alpha + a''_{\alpha\beta} x_\alpha^2 + \cdots)$$

geht, wenn man vorübergehend

$$h_1 = \xi_1^2, \ldots, h_n = \xi_n^2$$

setzt, in eine Potenzreihe von $x_\alpha, \xi_1, \ldots, \xi_n$ über, welche mit quadratischen Gliedern beginnt und in welcher das Glied mit x_α^2 nicht fehlt. Nach einem Satze von *Weierstrass**) gestattet eine solche Potenzreihe eine Factorenzerlegung von folgender Form:

$$F_\alpha(x_\alpha) = -(x_\alpha^2 + f_\alpha x_\alpha + g_\alpha) G_\alpha(x_\alpha);$$

hierin sind f_α, g_α Potenzreihen von $\xi_1, \ldots, \xi_n$, und zwar fehlen in f_α die Glieder geringeren als ersten und in g_α die Glieder geringeren als zweiten Grades; G_α ist eine Potenzreihe von $x_\alpha, \xi_1, \ldots, \xi_n$, welche einen von Null verschiedenen Werth annimmt, wenn sämmtliche $n+1$ Argumente verschwinden. Nachdem die Möglichkeit einer solchen Zerlegung bewiesen ist, berechnet man die Reihen f_α, g_α und G_α nach der Methode der unbestimmten Coefficienten. Man erkennt auf diese Weise, dass in unserem

---

*) *Weierstrass*, einige auf die analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehenden Sätze (Werke Bd. II, S. 135ff.).

Falle, wo $F_\alpha(x_\alpha)$ ausser von x_α nur von $\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$ abhängt, auch f_α, g_α und $G_\alpha(x_\alpha)$ Potenzreihen von $\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$ und von $x_\alpha, \xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$ sind. Mit anderen Worten, f_α und g_α sind Potenzreihen von $h_1, \ldots, h_n$, welche für $h_1 = \ldots h_n = 0$ verschwinden, und $G_\alpha(x_\alpha)$ ist eine Potenzreihe von $x_\alpha, h_1, \ldots, h_n$. Indem man in der obigen Gleichung zunächst die Glieder gleicher Dimension in $h_1, \ldots, h_n$ und dann die Coefficienten gleicher Potenzen von x_α vergleicht, findet man

$$f_\alpha = -2 \sum_\beta \left(\frac{a'_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha^2} + \frac{s'_\alpha a_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha^4} \right) h_\beta + \cdots,$$

$$g_\alpha = -\frac{2}{\lambda_\alpha^2} \sum_\beta a_{\alpha\beta} h_\beta - 4 \sum_\beta a_{\alpha\beta} h_\beta \cdot \sum_\beta \left(\frac{(\lambda_\alpha^2 s''_\alpha + s'^2_\alpha) a_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha^8} + \frac{s'_\alpha a'_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha^6} + \frac{a''_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha^4} \right) h_\beta + \cdots$$

und

$$G_\alpha(x_\alpha) = \lambda_\alpha^2 - s'_\alpha x_\alpha - s''_\alpha x_\alpha^2 - 2 \sum_\beta \left(\frac{(\lambda_\alpha^2 s''_\alpha + s'^2_\alpha) a_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha^4} + \frac{s'_\alpha a'_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha^2} + a''_{\alpha\beta} \right) h_\beta + \cdots .$$

Man hat

$$F_\alpha(x_\alpha) = -(x_\alpha - a_\alpha)(x_\alpha - b_\alpha) G_\alpha(x_\alpha),$$

wo

$$\frac{a_\alpha + b_\alpha}{2} = -\frac{f_\alpha}{2},$$

$$\frac{a_\alpha - b_\alpha}{2} = \pm \sqrt{-g_\alpha + \left(\frac{f_\alpha}{2}\right)^2}$$

ist.

Wir führen an Stelle von $h_1, \ldots, h_n$ neue Constante $k_1, \ldots, k_n$ ein, indem wir

$$-g_\alpha + \left(\frac{f_\alpha}{2}\right)^2 = k_\alpha^2 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

oder

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} h_\beta + \cdots = \frac{1}{2} \lambda_\alpha^2 k_\alpha^2 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

setzen, sodass $h_1, \ldots, h_n$ Potenzreihen von $k_1^2, \ldots, k_n^2$ werden:

$$h_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\lambda_\alpha^2 \Delta_{\alpha\beta}}{2\Delta} k_\alpha^2 + \cdots \qquad (\beta = 1, \ldots, n);$$

dabei ist $\Delta_{\alpha\beta}$ die Unterdeterminante von $a_{\alpha\beta}$ in der Determinante Δ. Die Potenzreihe $-\frac{f_\alpha}{2}$ von $h_1, \ldots, h_n$ geht in eine Potenzreihe von $k_1^2, \ldots, k_n^2$ über:

$$K_\alpha = \frac{s'_\alpha}{2\lambda_\alpha^2} k_\alpha^2 + \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\lambda_\gamma^2 \sum_{\beta=1}^{n} a'_{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\beta}}{2\lambda_\alpha^2 \Delta} k_\gamma^2 + \cdots,$$

und $G_\alpha(x_\alpha)$ wird eine Potenzreihe von $x_\alpha, k_1^2, \ldots, k_n^2$. Wir haben jetzt

$$\frac{a_\alpha + b_\alpha}{2} = K_\alpha, \qquad \frac{a_\alpha - b_\alpha}{2} = k_\alpha,^{*})$$

also

$$a_\alpha = k_\alpha + K_\alpha, \qquad b_\alpha = -k_\alpha + K_\alpha.$$

Die Function $G_\alpha(x_\alpha) = \lambda_\alpha^2 - s'_\alpha x_\alpha + \cdots$ ist für hinreichend kleine Werthe von $|x_\alpha|, k_1^2, \ldots, k_n^2$ positiv.

Wir geben unseren Integralgleichungen die Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{x_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha 1}(x_\alpha)\, dx_\alpha}{\sqrt{(x_\alpha - a_\alpha)(b_\alpha - x_\alpha)}\sqrt{G_\alpha(x_\alpha)}} = t + H_1,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{x_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)\, dx_\alpha}{\sqrt{(x_\alpha - a_\alpha)(b_\alpha - x_\alpha)}\sqrt{G_\alpha(x_\alpha)}} = H_\beta \qquad (\beta = 2, \ldots, n)$$

und nehmen unter der Voraussetzung, dass x_α zwischen a_α und b_α bleibt, alle Quadratwurzeln positiv an. Nimmt man $|k_1|, \ldots, |k_n|$ hinreichend klein an, so kommen auch a_α und b_α, welche verschiedene Vorzeichen haben, der Null beliebig nahe, und es sind die von *Staude* für $n = 2$ und von *Stäckel* für beliebiges n gemachten Voraussetzungen erfüllt:**)

1) $\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ ändert für Werthe von x_α zwischen a_α und b_α das Vorzeichen nicht (denn $\varphi_{\alpha\beta}(0)$ ist von Null verschieden);

2) $G_\alpha(x_\alpha)$ ist für alle Werthe von x_α zwischen a_α und b_α positiv;

3) die Function

$$\frac{\Phi}{\sqrt{G_1} \ldots \sqrt{G_n}}$$

ändert ihr Zeichen nicht und ist von Null verschieden, wenn x_α zwischen a_α und b_α bleibt.

---

*) Man hätte ebenso gut $\frac{a_\alpha - b_\alpha}{2} = -k_\alpha$ setzen können.

) ***Staude,* über eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier Veränderlicher (Math. Ann. Bd. 29); über die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche (Act. math. Bd. 11); über bedingt periodische Functionen eines beschränkt veränderlichen complexen Arguments und Anwendungen derselben auf Mechanik (dieses Journal Bd. 105). — ***Stäckel,*** Habilitationsschrift (Halle 1891); über die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit (Math. Ann. Bd. 42); über die Gestalt der Bahncurven für eine Klasse dynamischer Probleme (Math. Ann. Bd. 54). — Vgl. auch die Darstellung bei ***Charlier,*** Mechanik des Himmels, Bd. I, S. 97ff. — Für $n = 1$ vgl. ***Weierstrass,*** über eine Gattung reell periodischer Functionen (Werke Bd. II) sowie § 4 und § 5 des zweiten Aufsatzes des Verf. zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad (Zeitschr. für Math. u. Phys. Bd. 49).

Wir setzen

$$x_\alpha = \frac{a_\alpha + b_\alpha}{2} + \frac{a_\alpha - b_\alpha}{2} \cos w_\alpha = K_\alpha + k_\alpha \cos w_\alpha$$

und ordnen dem Gebiete $a_\alpha \dots b_\alpha$ der Veränderlichen x_α das Gebiet $0 \dots \pi$ der neuen Veränderlichen w_α zu. Dadurch wird

$$\frac{\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)}{\sqrt{G_\alpha(x_\alpha)}} = h_{\alpha\beta}(w_\alpha),$$

und unsere Integralgleichungen gehen in

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^{w_\alpha} h_{\alpha\beta}(w_\alpha)\, dw_\alpha = t_\beta \qquad (\beta = 1, \dots, n)$$

über, worin

$$t_1 = t + H_1, \qquad t_2 = H_2, \dots, t_n = H_n$$

zu setzen ist.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$x_\alpha = K_\alpha + k_\alpha \cos w_\alpha,$$

$$x_\alpha^2 = \left(K_\alpha^2 + \frac{1}{2} k_\alpha^2\right) + 2 K_\alpha k_\alpha \cos w_\alpha + \frac{1}{2} k_\alpha^2 \cos 2 w_\alpha$$

u. s. w. findet man

$$h_{\alpha\beta}(w_\alpha) = S_{\alpha\beta}^{(0)} + S_{\alpha\beta}^{(1)} k_\alpha \cos w_\alpha + 2 S_{\alpha\beta}^{(2)} k_\alpha^2 \cos 2 w_\alpha + \cdots,$$

wo $S_{\alpha\beta}^{(0)}, S_{\alpha\beta}^{(1)}, S_{\alpha\beta}^{(2)}, \dots$ Potenzreihen von $k_1^2, \dots, k_n^2$ sind; insbesondere ist

$$S_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{a_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha} + \cdots.$$

Demnach ist

$$\omega_{\alpha\beta} = \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)\, dx_\alpha}{\sqrt{(x_\alpha - a_\alpha)(b_\alpha - x_\alpha)}\sqrt{G_\alpha(x_\alpha)}} = \int_0^\pi h_{\alpha\beta}(w_\alpha)\, dw_\alpha$$

$$= \pi S_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{\pi a_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha} + \cdots$$

eine Potenzreihe von $k_1^2, \dots, k_n^2$, und die Determinante

$$\Omega = |\omega_{\alpha\beta}| = \frac{\pi^n \Delta}{\lambda_1 \dots \lambda_n} + \cdots$$

ist für hinreichend kleine Werthe von $|k_1|, \dots, |k_n|$ von Null verschieden. Ferner ist

$$\int_0^{w_\alpha} h_{\alpha\beta}(w_\alpha)\, dw_\alpha = S_{\alpha\beta}^{(0)} w_\alpha + \sum_{\mu=1}^{\infty} S_{\alpha\beta}^{(\mu)} k_\alpha^\mu \sin \mu w_\alpha,$$

also

$$t_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} S_{\alpha\beta}^{(0)} w_\alpha + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} S_{\alpha\beta}^{(\mu)} k_\alpha^\mu \sin \mu w_\alpha .$$

An Stelle von $t_1, \ldots, t_n$ führen wir auf Grund der Gleichungen

$$\pi t_\beta = \omega_{1\beta} u_1 + \cdots + \omega_{n\beta} u_n \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

neue Veränderliche $u_1, \ldots, u_n$ ein. Durch die Gleichungen

$$\pi S_{\alpha\beta}^{(\mu)} = \omega_{1\beta} T_{\alpha 1}^{(\mu)} + \cdots + \omega_{n\beta} T_{\alpha n}^{(\mu)} \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

wird $T_{\alpha\beta}^{(\mu)}$ als Potenzreihe von $k_1^2, \ldots, k_n^2$ definirt. Dann ist

$$u_\beta = w_\beta + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} T_{\alpha\beta}^{(\mu)} k_\alpha^\mu \sin \mu w_\alpha \text{*)} \qquad (\beta = 1, \ldots, n).$$

§ 3.

Nach einem von ***Staude*** für $n = 2$ und von ***Stäckel*** für beliebiges n aufgestellten Satze**) ist

$$x_\alpha = f_\alpha (u_1, \ldots, u_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

eine eindeutige analytische Function mit den Eigenschaften:

$$f_\alpha (-u_1, \ldots, -u_n) = f_\alpha (u_1, \ldots, u_n),$$

$$f_\alpha (u_1 + 2m_1 \pi i, \ldots, u_n + 2m_n \pi i) = f_\alpha (u_1, \ldots, u_n);$$

hierbei sind $m_1, \ldots, m_n$ beliebige ganze Zahlen. Eine solche Function lässt sich in eine unbedingt und gleichmässig convergente trigonometrische Reihe

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_n} A_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{(\alpha)} \cos (\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$$
$$(\nu_1, \ldots, \nu_n = -\infty \ldots + \infty)$$

entwickeln, worin

$$A_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{(\alpha)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_\alpha \cos (\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

ist.***) (Wegen $A_{\nu_1, \ldots, \nu_n} = A_{-\nu_1, \ldots, -\nu_n}$ lassen sich je zwei Reihenglieder vereinigen.) Unter Einführung der Functionaldeterminante

---

*) In den benutzten Arbeiten ist $a_\alpha < b_\alpha$ vorausgesetzt, während es bei uns vom Vorzeichen von k_α abhängt, welche der beiden Grössen a_α, b_α die grössere ist. Man sieht aber, dass die Formeln des Textes vom Vorzeichen von k_α unabhängig sind.

) ***Staude*, Math. Ann. Bd. 29. — ***Stäckel***, Habilitationsschrift. — Der in § 5 der Habilitationsschrift von ***Stäckel*** gegebene Beweis scheint allerdings der Vervollständigung zu bedürfen.

***) Durch partielle Integration findet man, dass

$$|A_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{(\alpha)}| < \frac{A}{\nu_1^2 \ldots \nu_n^2}$$

$$D(w_1, \ldots, w_n) = \left| \frac{\partial u_\beta}{\partial w_\gamma} \right| \qquad (\beta, \gamma = 1, \ldots, n)$$

ist

$$A^{(a)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_a \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n) D(w_1, \ldots, w_n) \, dw_1 \ldots dw_n.$$

Man hat

$$\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n = \nu_1 w_1 + \cdots + \nu_n w_n + \eta,$$

wo

$$\eta = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} (\nu_1 T^{(\mu)}_{\alpha 1} + \cdots + \nu_n T^{(\mu)}_{\alpha n}) k_\alpha^\mu \sin \mu w_\alpha$$

ist. Also ist

$$\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n) = \cos(\nu_1 w_1 + \cdots + \nu_n w_n)$$

$$- \eta \sin(\nu_1 w_1 + \cdots + \nu_n w_n) - \frac{1}{2} \eta^2 \cos(\nu_1 w_1 + \cdots + \nu_n w_n) + \cdots,$$

worin die geraden Potenzen von η mit $\cos(\nu_1 w_1 + \cdots)$, die ungeraden mit $\sin(\nu_1 w_1 + \cdots)$ multiplicirt sind. Die m-te Potenz von η ist eine Summe von Grössen

$$P k_1^{\mu_1} \ldots k_n^{\mu_n} \sin \mu_1 w_1 \ldots \sin \mu_n w_n \qquad (\mu_1 + \cdots + \mu_n = m),$$

wo P eine Potenzreihe von $k_1^2, \ldots, k_n^2$ darstellt, oder eine Summe von Grössen

$$P k_1^{\mu_1} \ldots k_n^{\mu_n} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\mu_1 w_1 \pm \cdots \pm \mu_n w_n),$$

worin cos oder sin vorkommt, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Das Product

$$\eta^m \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\nu_1 w_1 + \cdots + \nu_n w_n)$$

ist also eine Summe von Grössen von der Form

$$P k_1^{\mu_1} \ldots k_n^{\mu_n} \cos((\nu_1 \pm \mu_1) w_1 + \cdots + (\nu_n \pm \mu_n) w_n),$$

wo $\mu_1, \ldots, \mu_n$ positive ganze Zahlen einschliesslich Null sind. Eine Summe von derselben Form ist $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$.

Ferner ist

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial w_\alpha} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sigma T^{(\sigma)}_{\alpha\beta} k_\alpha^\sigma \cos \sigma w_\alpha,$$

---

ist, wenn $\nu_1, \ldots, \nu_n$ sämmtlich von Null verschieden sind, dagegen

$$|A^{(a)}_{\nu_1, \ldots, \nu_m, 0, \ldots, 0}| < \frac{A}{\nu_1^2 \ldots \nu_m^2},$$

wenn nur $\nu_1, \ldots, \nu_m$ von Null verschieden sind. Dabei ist A eine von $\nu_1, \ldots$ unabhängige positive Grösse.

wo $\delta_{\alpha\alpha} = 1$, $\delta_{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \leqslant \beta)$ ist. Die Functionaldeterminante $D(w_1, \ldots, w_n)$ ist also eine Summe von Grössen von der Form

$$P\, k_1^{\sigma_1} \ldots k_n^{\sigma_n} \cos \sigma_1 w_1 \ldots \cos \sigma_n w_n$$

oder eine Summe von Grössen

$$P\, k_1^{\sigma_1} \ldots k_n^{\sigma_n} \cos (\sigma_1 w_1 \pm \cdots \pm \sigma_n w_n),$$

wo $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ positive ganze Zahlen einschliesslich Null sind.

Mit Rücksicht darauf, dass

$$x_\alpha = K_\alpha + k_\alpha \cos w_\alpha$$

gesetzt wurde, ist die zu integrirende Function gleich

$$K_\alpha \cos (\nu_1 u_1 + \cdots) D + k_\alpha \cos w_\alpha \cos (\nu_1 u_1 + \cdots) D.$$

Der erste Theil ist eine Summe von Grössen

$$P\, k_1^{\mu_1 + \sigma_1} \ldots k_n^{\mu_n + \sigma_n} \cos ((\nu_1 \pm \mu_1 \pm \sigma_1) w_1 + \cdots + (\nu_n \pm \mu_n \pm \sigma_n) w_n);$$

der zweite Theil ist eine Summe von ähnlichen Grössen, es erscheint nur k_α mit dem Exponenten $\mu_\alpha + \sigma_\alpha + 1$, und unter dem Zeichen cos ist w_α mit $\nu_\alpha \pm \mu_\alpha \pm \sigma_\alpha \pm 1$ multiplicirt.

Nun ist das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \cos (z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n)\, dw_1 \ldots dw_n$$

gleich Null, wenn mindestens eine der ganzen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ von Null verschieden ist, während es für $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ den Werth $(2\pi)^n$ annimmt. Wir haben also bei der Berechnung von $A^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ nur diejenigen Glieder der zu integrirenden Function beizubehalten, in welchen $\nu_1 \pm \mu_1 \pm \sigma_1 = 0$ u. s. w. ist; dann ist aber $\mu_1 + \sigma_1$ entweder gleich $|\nu_1|$ oder um eine gerade Zahl grösser als $|\nu_1|$; es ist also $k_1^{\mu_1 + \sigma_1}$ entweder gleich $k_1^{|\nu_1|}$ oder gleich dem Product aus $k_1^{|\nu_1|}$ und einer Potenz von k_1^2 mit ganzem positivem Exponenten; u. s. w. Der in Betracht kommende Theil des Integranden ist demnach

$$P^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} k_1^{|\nu_1|} \ldots k_n^{|\nu_n|},$$

wo $P^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ eine Potenzreihe von $k_1^2, \ldots, k_n^2$ darstellt. Es ist also

$$A^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} = P^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} k_1^{|\nu_1|} \ldots k_n^{|\nu_n|}.$$

Der Coefficient $A^{(\alpha)}_{0, \ldots, 0} = P^{(\alpha)}_{0, \ldots, 0}$ beginnt mit Gliedern ersten Grades in $k_1^2, \ldots, k_n^2$. Denn ein von den k freies Glied kann in $A^{(\alpha)}_{0, \ldots, 0}$ nicht vorkommen, weil der Factor x_α des Integranden kein solches enthält. — Der Coefficient

$A^{(\alpha)}_{0,\ldots,1,\ldots,0}$ von $\cos u_\beta$ in der Reihe für x_α enthält im Falle $\alpha \leqq \beta$ kein in den k lineares Glied, im Falle $\alpha = \beta$ das lineare Glied $\frac{1}{2} k_\alpha$. Denn die Glieder niedrigsten Grades in $A^{(\alpha)}_{0,\ldots,1,\ldots,0}$ erhält man, indem man in jedem der drei Factoren $x_\alpha, \cos w_\beta, D$ der zu integrirenden Function das niedrigste Glied $k_\alpha \cos w_\alpha, \cos w_\beta, 1$ beibehält. Nun ist aber

$$\frac{k_\alpha}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \cos w_\alpha \cos w_\beta \, dw_1 \ldots dw_n$$

gleich $\frac{1}{2} k_\alpha$ für $\alpha = \beta$, gleich Null für $\alpha \leqq \beta$. Auch der Coefficient von $\cos(-u_\alpha)$ ist gleich $\frac{1}{2} k_\alpha$, der von $\cos(-u_\beta)$ gleich Null. Die Reihe für x_α enthält also ausser dem linearen Glied $k_\alpha \cos u_\alpha$ nur Glieder zweiten und höheren Grades in Bezug auf $k_1, \ldots, k_n$.

Wenn wir nun

$$t_1 = t + H_1, \qquad t_2 = H_2, \ \ldots, \ t_n = H_n$$

setzen, so geht

$$u_\alpha = \frac{\pi}{\Omega} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{\alpha\beta}} t_\beta$$

in

$$u_\alpha = \varrho_\alpha t + l_\alpha$$

über, wo

$$\varrho_\alpha = \frac{\pi}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{\alpha 1}}$$

und

$$l_\alpha = \frac{\pi}{\Omega} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{\alpha\beta}} H_\beta$$

ist. Hiernach sind $l_1, \ldots, l_n$ ebenso wie $H_1, \ldots, H_n$ willkürliche Constante.

Weil

$$\Omega = \frac{\pi^n \Delta}{\lambda_1 \ldots \lambda_n} + \cdots$$

und

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{\alpha 1}} = \frac{\pi^{n-1} \Delta_{\alpha 1}}{\lambda_1 \ldots \lambda_{\alpha-1} \lambda_{\alpha+1} \ldots \lambda_n} + \cdots$$

Potenzreihen von $k_1^2, \ldots, k_n^2$ sind, gilt das gleiche für

$$\varrho_\alpha = \lambda_\alpha + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots . n).$$

Wir haben demnach die folgende analytische Darstellung der in der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ ***verlaufenden Bewegungen:***

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1} \ldots \sum_{\nu_n} P^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} k_1^{|\nu_1|} \ldots k_n^{|\nu_n|} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n);$$

$$(\nu_1, \ldots, \nu_n = -\infty \ldots +\infty)$$

dabei ist

$$u_\alpha = \varrho_\alpha t + l_\alpha;$$

$k_1, \ldots, k_n$ ***und*** $l_1, \ldots, l_n$ ***sind willkürliche Constante;*** $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ ***und*** $P^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ ***sind Potenzreihen von*** $k_1^2, \ldots, k_n^2$, ***welche convergiren, wenn diese n Constanten hinreichend klein sind; für*** $k_1 = \ldots = k_n = 0$ ***ist*** $\varrho_\alpha = \lambda_\alpha$. ***Die Reihe für*** x_α ***ist für alle Werthe von t und für die Werthe von*** $|k_1|, \ldots, |k_n|$ ***unter einer gewissen Grenze unbedingt und gleichmässig convergent.***

§ 4.

Wir geben den gefundenen Reihen verschiedene andere Formen. Zunächst ist $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$ eine Summe von Producten

$$\pm \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} |\nu_1| u_1 \ldots \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} |\nu_n| u_n;$$

$\cos|\nu_1| u_1$ und $\sin|\nu_1| u_1$ lassen sich als ganze homogene Functionen $|\nu_1|$-ten Grades von $\cos u_1$, $\sin u_1$ darstellen u. s. w.; demnach ist $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$ eine ganze homogene Function von $\cos u_1$, $\sin u_1$; …; $\cos u_n$, $\sin u_n$ und zwar von der Dimension $|\nu_\beta|$ in Bezug auf $\cos u_\beta$, $\sin u_\beta$. Also erscheint

$$k_1^{|\nu_1|} \ldots k_n^{|\nu_n|} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$$

als ganze homogene Function von $k_1 \cos u_1$, $k_1 \sin u_1$; …; $k_n \cos u_n$, $k_n \sin u_n$. Die Potenzreihe $P^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ von $k_1^2, \ldots, k_n^2$ lässt sich wegen

$$k_1^2 = (k_1 \cos u_1)^2 + (k_1 \sin u_1)^2, \ldots$$

auch als Potenzreihe von $k_1 \cos u_1$, $k_1 \sin u_1, \ldots$ auffassen. Demnach ist das Glied

$$A^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$$

der Reihe für x_α eine Potenzreihe der n Argumentenpaare

$$k_\beta \cos u_\beta, \qquad k_\beta \sin u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n).$$

Da die Reihe für x_α unbedingt und gleichmässig convergirt, wenn

$$|k_\beta \cos u_\beta| < \mathfrak{r}, \qquad |k_\beta \sin u_\beta| < \mathfrak{r} \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

und $\mathfrak{r}$ hinreichend klein ist, so lässt sich*) x_α *als Potenzreihe der* $2n$ *Argumente*

$$k_\beta \cos u_\beta, \qquad k_\beta \sin u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

darstellen, welche convergirt, wenn die absoluten Beträge dieser Argumente kleiner als $\mathfrak{r}$ *sind.* Diese Potenzreihe enthält kein von den Argumenten freies Glied und das einzige lineare Glied $k_\alpha \cos u_\alpha$.

Man kann x_α auch als Potenzreihe von $k_1, \ldots, k_n$ mit von $u_1, \ldots, u_n$ abhängigen Coefficienten auffassen. Es sei

$$P^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} = \Sigma A\, k_1^{2m_1} \ldots k_n^{2m_n},$$

wo $m_1, \ldots, m_n$ ganze positive Zahlen einschliesslich Null sind, also

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \sum_{m_1, \ldots, m_n} A\, k_1^{|\nu_1|+2m_1} \ldots k_n^{|\nu_n|+2m_n} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n).$$

Ordnet man nach Potenzen von $k_1, \ldots, k_n$, *so erhält man*

$$x_\alpha = \sum_{p_1, \ldots, p_n} k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n} \left\{ \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n} A \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n) \right\},$$

wo $p_1, \ldots, p_n$ *ganze positive Zahlen sind und die Summe, welche den Coefficienten von* $k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n}$ *bildet, über diejenigen ganzzahligen Werthe von* $\nu_1, \ldots, \nu_n$ *erstreckt wird, welche die Bedingung*

$$|\nu_1| = p_1 - 2m_1, \ldots, |\nu_n| = p_n - 2m_n$$

erfüllen; hierbei sind $m_1, \ldots, m_n$ *positive ganze Zahlen.* Diese Reihe ist für alle Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ und für $|k_1| < \mathfrak{r}, \ldots, |k_n| < \mathfrak{r}$ unbedingt und gleichmässig convergent.

Wir ersetzen die zuerst eingeführten Constanten

$$k_1, \ldots, k_n;\ l_1, \ldots, l_n$$

durch die $2n$ *neuen Constanten*

$$k'_\alpha = k_\alpha \cos l_\alpha,\ k'_{n+\alpha} = k_\alpha \sin l_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Setzt man

$$v_\alpha = \varrho_\alpha t \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

so ist $u_\alpha = v_\alpha + l_\alpha$, also

$$k_\alpha \cos u_\alpha = k'_\alpha \cos v_\alpha - k'_{n+\alpha} \sin v_\alpha,$$
$$k_\alpha \sin u_\alpha = k'_\alpha \sin v_\alpha + k'_{n+\alpha} \cos v_\alpha.$$

---

*) *Weierstrass*, Werke Bd. I, S. 70ff.

Die Reihe für x_α, welche früher als Potenzreihe von

$$k_\beta \cos u_\beta,\ k_\beta \sin u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

dargestellt wurde, geht jetzt in eine Potenzreihe von $k'_1, \ldots, k'_{2n}$ über:

$$x_\alpha = \Sigma\, \mathfrak{A}\, k_1'^{p_1} \ldots k_n'^{p_n} k_{n+1}'^{p_{n+1}} \ldots k_{2n}'^{p_{2n}};$$

darin hat $\mathfrak{A}$ die Form

$$\Sigma\, \text{Const.} \cos^{q_1} v_1 \ldots \cos^{q_n} v_n \sin^{q_{n+1}} v_1 \ldots \sin^{q_{2n}} v_n$$
$$(q_\beta + q_{n+\beta} = p_\beta + p_{n+\beta})$$

oder

$$\Sigma\, \text{Const.} \cos(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n),$$

wo $\nu_1, \ldots, \nu_n$ positive oder negative ganze Zahlen sind, welche die Bedingung

$$|\nu_\beta| = p_\beta + p_{n+\beta} - 2m_\beta \qquad (m_\beta = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllen. Die Reihe beginnt mit den linearen Gliedern

$$k'_\alpha \cos v_\alpha - k'_{n+\alpha} \sin v_\alpha.$$

Wegen $k_\alpha^2 = k_\alpha'^2 + k_{n+\alpha}'^2$ gehen $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ in Potenzreihen von

$$k_1'^2 + k_{n+1}'^2, \ldots, k_n'^2 + k_{2n}'^2$$

über.

Anders geordnet wird unsere Reihe

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1} \ldots \sum_{\nu_n} \{A^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$$
$$+ B^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \sin(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)\}$$
$$(\nu_1, \ldots, \nu_n = -\infty + \cdots + \infty);$$

$A^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ und $B^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ sind Potenzreihen von $k'_1, \ldots, k'_{2n}$ mit Gliedern

$$\text{Const.}\ k_1'^{p_1} \ldots k_{2n}'^{p_{2n}},$$

deren Exponenten die Bedingung erfüllen:

$$p_\beta + p_{n+\beta} = |\nu_\beta| + 2m_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n).$$

Als Integrationsconstante mögen jetzt die Anfangswerthe der Coordinaten und der Geschwindigkeiten eingeführt werden. Für $t = 0$ sei

$$x_\alpha = c_\alpha,\ x'_\alpha = c'_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Oben war x_α als Potenzreihe der $2n$ Grössen

$$\xi_\beta = k'_\beta \cos v_\beta - k'_{n+\beta} \sin v_\beta,$$
$$\eta_\beta = k'_\beta \sin v_\beta + k'_{n+\beta} \cos v_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

dargestellt:

$$x_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\frac{d\xi_\beta}{dt} = -\varrho_\beta \eta_\beta, \quad \frac{d\eta_\beta}{dt} = \varrho_\beta \xi_\beta$$

folgt hieraus

$$x'_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{n} \varrho_\beta \left(\xi_\beta \frac{\partial \mathfrak{P}_\alpha}{\partial \eta_\beta} - \eta_\beta \frac{\partial \mathfrak{P}_\alpha}{\partial \xi_\beta} \right).$$

Da die ϱ_β Potenzreihen der

$$k_\beta^2 = k_\beta'^2 + k_{n+\beta}'^2 = \xi_\beta^2 + \eta_\beta^2$$

sind, lässt sich x'_α als Potenzreihe der ξ_β, η_β darstellen:

$$x'_\alpha = \overline{\mathfrak{P}}_\alpha (\xi_1, \ldots, \xi_n; \ \eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Man hat

$$\mathfrak{P}_\alpha = \xi_\alpha + \cdots, \ \overline{\mathfrak{P}}_\alpha = -\lambda_\alpha \eta_\alpha + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von zweiter und höherer Dimension in den ξ, η sind. Da für $t = 0$ $\xi_\beta = k'_\beta$, $\eta_\beta = k'_{n+\beta}$ wird, haben wir

$$c_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha (k'_1, \ldots, k'_{2n}) = k'_\alpha + \cdots,$$

$$c'_\alpha = \overline{\mathfrak{P}}_\alpha (k'_1, \ldots, k'_{2n}) = -\lambda_\alpha k'_{n+\alpha} + \cdots .$$

Hieraus ergeben sich $k'_1, \ldots, k'_{2n}$ als Potenzreihen von $c_1, \ldots, c_n$; $c'_1, \ldots, c'_n$:

$$k'_\alpha = c_\alpha + \cdots, \ k'_{n+\alpha} = -\frac{c'_\alpha}{\lambda_\alpha} + \cdots .$$

Hiernach geht $\varrho_\alpha = \lambda_\alpha + \cdots$ in eine Potenzreihe der c, c' über, in welcher die linearen Glieder fehlen. Die Potenzreihe x_α von $k'_1, \ldots, k'_{2n}$ wird eine Potenzreihe der c, c':

$$x_\alpha = \Sigma \mathfrak{B} \, c_1^{p_1} \ldots c_n^{p_n} \, c_1'^{p_{n+1}} \ldots c_n'^{p_{2n}};$$

darin ist $\mathfrak{B}$ eine Summe von Gliedern von der Form

$$\text{Const.} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n),$$

wo $\nu_1, \ldots, \nu_n$ positive oder negative ganze Zahlen sind, welche die Bedingung

$$|\nu_1| + \cdots + |\nu_n| \leqq p_1 + \cdots + p_{2n}$$

erfüllen. Oder man hat

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1} \ldots \sum_{\nu_n} \{ A^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \cos (\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n) + B^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \sin (\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n) \},$$

worin $A^{(\alpha)}_{\nu_1,\dots,\nu_n}$ und $B^{(\alpha)}_{\nu_1,\dots,\nu_n}$ Potenzreihen der c, c' mit Gliedern von mindestens der Dimension $|\nu_1|+\cdots+|\nu_n|$ sind.

§ 5.

Aus den bisherigen Darstellungen der in der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage verlaufenden Bewegungen *ergeben sich durch specielle Wahl der Integrationsconstanten Darstellungen periodischer Bewegungen.*

Setzt man in der am Schluss von § 3 aufgestellten Reihe

$$k_2 = 0, \dots, k_n = 0,$$

so wird

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} P^{(\alpha)}_{\nu_1} k_1^{\nu_1} \cos \nu_1 u_1;$$

hierin ist $u_1 = \varrho_1 t + l_1$ und $\varrho_1 = \lambda_1 + \cdots$ eine Potenzreihe von k_1^2 ebenso wie $P^{(\alpha)}_0 = P^{(\alpha)}_{0,0,\dots,0}$ und $P^{(\alpha)}_{\nu_1} = P^{(\alpha)}_{\nu_1,0,\dots,0} + P^{(\alpha)}_{-\nu_1,0,\dots,0} = 2P^{(\alpha)}_{\nu_1,0,\dots,0}$. Diese Reihe stellt eine periodische Bewegung mit der Periode

$$\frac{2\pi}{\varrho_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} + \cdots$$

dar. Die $n-1$ Bedingungen $k_\alpha = 0$ $(\alpha = 2, \dots, n)$ zerfallen in

$$k'_\alpha = c_\alpha + \cdots = 0, \quad k'_{n+\alpha} = -\frac{c'_\alpha}{\lambda_\alpha} + \cdots = 0 \qquad (\alpha = 2, \dots, n),$$

wo an Stelle der Punkte Potenzreihen von $c_1, \dots, c_n$; $c'_1, \dots, c'_n$ stehen, welche mit quadratischen Gliedern beginnen. Hieraus berechnet man $c_2, \dots, c_n$; $c'_2, \dots, c'_n$ als Potenzreihen von c_1, c'_1*) mit Gliedern mindestens zweiter Dimension. Durch Einsetzen dieser Potenzreihen geht

$$k_1^2 = k_1'^2 + k'^2_{n+1} = c_1^2 + \frac{c_1'^2}{\lambda_1^2} + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von mindestens dem dritten Grade in $c_1, c_2, \dots$; $c'_1, c'_2, \dots$ sind, in eine Potenzreihe von c_1, c'_1 über, welche mit quadratischen Gliedern beginnt:

$$k_1^2 = c_1^2 + \frac{c_1'^2}{\lambda_1^2} + \dots .$$

Demnach wird ϱ_1 eine Potenzreihe von c_1, c'_1, in welcher die linearen Glieder fehlen. Setzt man

$$v_1 = \varrho_1 t,$$

*) Durch geeignete Wahl des Anfangspunktes der Zeit t erreicht man, dass $c'_1 = 0$ wird.

so wird

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (A_{\nu_1}^{(\alpha)} \cos \nu_1 v_1 + B_{\nu_1}^{(\alpha)} \sin \nu_1 v_1);$$

hierin sind $A_{\nu_1}^{(\alpha)}$ und $B_{\nu_1}^{(\alpha)}$ Potenzreihen von k_1', k_{n+1}' mit Gliedern von den Dimensionen ν_1, ν_1+2, ν_1+4, ...; sie gehen in Potenzreihen von c_1, c_1' über, welche mit Gliedern ν_1-ter Dimension beginnen.

In der in § 3 abgeleiteten Reihe setzen wir jetzt

$$k_{m+1} = 0, \ldots, k_n = 0,$$

sodass $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ in Potenzreihen von $k_1^2, \ldots, k_m^2$ übergehen, ebenso wie die Verhältnisse

$$q_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_m} = \frac{\lambda_1}{\lambda_m} + B_{11} k_1^2 + \cdots + B_{1m} k_m^2 + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{m-1} = \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_m} = \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} + B_{m-1,1} k_1^2 + \cdots + B_{m-1,m} k_m^2 + \cdots.$$

Ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} B_{11}, \ldots, B_{1,m-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_{m-1,1}, \ldots, B_{m-1,m-1} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so ergeben sich

$$k_1^2, \ldots, k_{m-1}^2$$

als Potenzreihen von

$$k_m^2, \qquad q_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_m}, \ldots, \qquad q_{m-1} - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m},$$

welche convergiren, wenn die absoluten Beträge dieser m Grössen kleiner als eine gewisse Grösse $\mathfrak{r}$ sind. Wir verstehen unter $q_1, \ldots, q_{m-1}$ beliebige *rationale* Zahlen von solcher Beschaffenheit, dass

$$\left| q_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \right| < \mathfrak{r}, \ldots, \left| q_{m-1} - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right| < \mathfrak{r}$$

ist, und nehmen $k_m^2 < \mathfrak{r}$ willkürlich an; werden $k_1^2, \ldots, k_{m-1}^2$ durch die obigen Formeln bestimmt, so sind $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ commensurabel. Ist

$$q_1 = \frac{p_1}{p_m}, \cdots, q_{m-1} = \frac{p_{m-1}}{p_m},$$

wo $p_1, \ldots, p_m$ ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, so hat man

$$\frac{\varrho_1}{p_1} = \cdots = \frac{\varrho_m}{p_m} = \varrho.$$

Setzt man

$$v = \varrho t,$$

so ist

$$v_1 = p_1 v, \ldots, v_m = p_m v,$$

und

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1} \ldots \sum_{\nu_m} \{A^{(\alpha)}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} \cos(\nu_1 p_1 + \cdots + \nu_m p_m) v + B^{(\alpha)}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} \sin(\nu_1 p_1 + \cdots + \nu_m p_m) v\}$$

stellt eine Lösung mit der Periode $\frac{2\pi}{\varrho}$ dar. Hierin sind $k'_1, \ldots, k'_m; k'_{n+1}, \ldots, k'_{n+m}$ Potenzreihen mit Gliedern von mindestens der Dimension $|\nu_1| + \cdots + |\nu_m|$. Da sich auf Grund der Gleichungen

$$k_{m+1} = 0, \ldots, k_n = 0 \quad \text{oder} \quad k'_{m+1} = 0, \ldots, k'_n = 0, \; k'_{n+m+1} = 0, \ldots, k'_{2n} = 0$$

die Anfangswerthe $c_{m+1}, \ldots, c_n, \; c'_{m+1}, \ldots, c'_n$ als Potenzreihen von

$$c_1, \ldots, c_m, \; c'_1, \ldots, c'_m$$

darstellen lassen, welche mit quadratischen Gliedern beginnen, so erscheinen

$$k'_\alpha = c_\alpha + \cdots, \; k'_{n+\alpha} = -\frac{c'_\alpha}{\lambda_\alpha} + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

und damit auch $A^{(\alpha)}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$ und $B^{(\alpha)}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$ als Potenzreihen von $c_1, \ldots, c_m, c'_1, \ldots, c'_m$. Da die $m-1$ Grössen

$$k_1^2 = c_1^2 + \frac{c_1'^2}{\lambda_1^2} + \cdots, \; \cdots, \; k_{m-1}^2 = c_{m-1}^2 + \frac{c_{m-1}'^2}{\lambda_{m-1}^2} + \cdots$$

Potenzreihen von

$$k_m^2 = c_m^2 + \frac{c_m'^2}{\lambda_m^2} + \cdots$$

sind, so müssen nach Annahme der rationalen Zahlen $q_1, \ldots, q_{m-1}$ zwischen den $2m$ Grössen

$$c_1, \ldots, c_m; \; c'_1, \ldots, c'_m$$

$m-1$ Relationen bestehen.

Sind insbesondere $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ commensurabel, so erhält man eine Schaar periodischer Lösungen, wenn man

$$q_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_m}, \ldots, \; q_{m-1} = \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}$$

setzt.

§ 6.

Als Beispiel diene die *Bewegung eines schweren Massenpunktes in der Nähe der tiefsten Stelle eines elliptischen Paraboloids mit lothrecht aufwärts gerichteter Achse**)

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p > q > 0).$$

Wir setzen

$$x^2 = \frac{p(\lambda - p)(p - \mu)}{p - q},$$

$$y^2 = \frac{q(\lambda - q)(\mu - q)}{p - q},$$

$$z = \frac{\lambda + \mu - p - q}{2};$$

jedem Punkte x, y, z der Fläche entspricht ein Werthepaar λ, μ, so dass

$$\lambda \geqq p \geqq \mu \geqq q$$

ist. Es ist $\lambda = p$ für die Parabel

$$x = 0,\ y^2 = 2qz,$$

$\mu = q$ für die Parabel

$$y = 0,\ x^2 = 2pz;$$

im tiefsten Punkt $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ ist $\lambda = p,\ \mu = q$. Wenn die Masse des bewegten Punktes gleich 1 gesetzt wird, so ist die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{8}\frac{\lambda(\lambda - \mu)}{(\lambda - p)(\lambda - q)}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{1}{8}\frac{\mu(\lambda - \mu)}{(p - \mu)(\mu - q)}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2,$$

die Kräftefunction

$$U = -gz = -\frac{1}{2}g(\lambda + \mu - p - q).$$

Durch die Substitution

$$\lambda - p = \frac{x_1^2}{p}, \qquad \mu - q = \frac{x_2^2}{q}$$

erhält man

$$x = x_1\sqrt{1 - \frac{x_2^2}{q(p-q)}}, \qquad y = x_2\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p(p-q)}}, \qquad z = \frac{x_1^2}{2p} + \frac{x_2^2}{2q};$$

einem Werthepaar x_1, x_2 in der Nähe von $x_1 = x_2 = 0$ entspricht ein

---

*) Vgl. *de St.-Germain*, Mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde (Liouv. Journ. 1877).

Flächenpunkt x, y, z in der Nähe von $x = y = z = 0$ und umgekehrt, wenn die positiven Werthe beider Quadratwurzeln genommen werden.

Jetzt ist

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{\left(1+\frac{x_1^2}{p^2}\right)\left(p-q+\frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}\right)}{p-q+\frac{x_1^2}{p}}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\left(1+\frac{x_2^2}{q^2}\right)\left(p-q+\frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}\right)}{p-q-\frac{x_2^2}{q}}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2,$$

$$U = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{q}\right).$$

Setzt man

$$\varphi_{11}(x_1) = \frac{p\left(1+\frac{x_1^2}{p^2}\right)^2}{p-q+\frac{x_1^2}{p}}, \qquad \varphi_{21}(x_2) = -\frac{q\left(1+\frac{x_2^2}{q^2}\right)^2}{p-q-\frac{x_2^2}{q}},$$

$$\varphi_{12}(x_1) = -\frac{1+\frac{x_1^2}{p^2}}{p-q+\frac{x_1^2}{p}}, \qquad \varphi_{22}(x_2) = \frac{1+\frac{x_2^2}{q^2}}{p-q-\frac{x_2^2}{q}}$$

und

$$\psi_1(x_1) = -\frac{1}{2}g\,\frac{x_1^2}{p}\left(1+\frac{x_1^2}{p^2}\right), \qquad \psi_2(x_2) = -\frac{1}{2}g\,\frac{x_2^2}{q}\left(1+\frac{x_2^2}{q^2}\right),$$

so hat man, wenn man die frühere Bezeichnung

$$\Phi = \varphi_{11}\varphi_{22}-\varphi_{12}\varphi_{21}, \qquad \Phi_1 = \varphi_{22}, \qquad \Phi_2 = -\varphi_{12}$$

anwendet,

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{\Phi}{\Phi_1}\,x_1'^2+\frac{1}{2}\,\frac{\Phi}{\Phi_2}\,x_2'^2,$$

$$U = \frac{\Phi_1}{\Phi}\,\psi_1+\frac{\Phi_2}{\Phi}\,\psi_2.$$

Die Bewegung des schweren Punktes in der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage $x_1 = x_2 = 0$ kann nach §§ 1–5 untersucht werden.

Es wird

$$F_1(x_1) = \left(1+\frac{x_1^2}{p^2}\right)\left\{-\frac{g}{p}\,x_1^2+\frac{2h_1\,p\left(1+\frac{x_1^2}{p^2}\right)-2h_2}{p-q+\frac{x_1^2}{p}}\right\},$$

$$F_2(x_2) = \left(1+\frac{x_2^2}{q^2}\right)\left\{-\frac{g}{q}\,x_2^2 - \frac{2h_1 q\left(1+\frac{x_2^2}{q^2}\right)-2h_2}{p-q-\frac{x_2^2}{q}}\right\}.$$

Die in der Nähe von $x_\alpha = 0$ gelegenen Wurzeln a_α, b_α der Gleichung $F_\alpha(x_\alpha) = 0$ $(\alpha = 1, 2)$ ergeben sich aus

$$x_1^2 = p\left(\frac{h_1}{g}-\frac{p-q}{2}\right)+p\sqrt{\left(\frac{h_1}{g}-\frac{p-q}{2}\right)^2+\frac{2(h_1 p-h_2)}{g}} = \frac{2p(ph_1-h_2)}{g(p-q)}+\cdots = k_1^2,$$

$$x_2^2 = q\left(\frac{h_1}{g}+\frac{p-q}{2}\right)-q\sqrt{\left(\frac{h_1}{g}+\frac{p-q}{2}\right)^2+\frac{2(h_1 q-h_2)}{g}} = \frac{2q(qh_1-h_2)}{g(q-p)}+\cdots = k_2^2,$$

wo k_1, k_2 neue Integrationsconstante sind; man erhält

$$h_1 = \frac{g}{2}\left(\frac{k_1^2}{p}+\frac{k_2^2}{q}\right)+\cdots,$$

$$h_2 = \frac{g}{2}\left(\frac{qk_1^2}{p}+\frac{pk_2^2}{q}\right)+\cdots$$

als Potenzreihen von k_1^2, k_2^2 und

$$a_\alpha = k_\alpha,\ b_\alpha = -k_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

ferner

$$F_\alpha(x_\alpha) = (k_\alpha+x_\alpha)(k_\alpha-x_\alpha)\,G_\alpha(x_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2),$$

wo

$$G_1(x_1) = \frac{g}{p}\left(1+\frac{x_1^2}{p^2}-\frac{k_2^2}{q(p-q)}+\cdots\right),$$

$$G_2(x_2) = \frac{g}{q}\left(1+\frac{x_2^2}{q^2}+\frac{k_1^2}{p(p-q)}+\cdots\right)$$

Potenzreihen von x_1^2, k_1^2, k_2^2 und x_2^2, k_1^2, k_2^2 sind. Nach § 3 ergeben sich

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{g}{p}}\left(1-\frac{k_1^2}{4p^2}+\cdots\right),$$

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{g}{q}}\left(1-\frac{k_2^2}{4q^2}+\cdots\right)$$

als Potenzreihen von k_1^2, k_2^2.

Da $\varphi_{\alpha\beta}(k_\alpha \cos w_\alpha)$ und $G_\alpha(k_\alpha \cos w_\alpha)$, also auch $h_{\alpha\beta}(w_\alpha)$ nur gerade Potenzen von k_1, k_2 enthalten, verschwinden (§ 2) alle $S_{\alpha\beta}^{(\mu)}$ und $T_{\alpha\beta}^{(\mu)}$ mit ungeradem Index μ; also kommen auch in der Darstellung von u_1, u_2 als Functionen von w_1, w_2 nur gerade Potenzen von k_1, k_2 vor. Setzt man wie früher

$$u_\alpha = \varrho_\alpha t + l_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

so ist

$$x_a = \sum_{\nu_1} \sum_{\nu_2} A^{(a)}_{\nu_1,\nu_2} \cos(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2),$$
$$(\nu_1, \nu_2 = -\infty \cdots +\infty)$$

$$A^{(a)}_{\nu_1,\nu_2} = \frac{k_a}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos w_a \cos(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial w_1} \frac{\partial u_2}{\partial w_2} - \frac{\partial u_1}{\partial w_2} \frac{\partial u_2}{\partial w_1} \right) \cdot dw_1\, dw_2.$$

Da unter den Integralzeichen eine Potenzreihe von k_1^2, k_2^2 steht, ist $A^{(a)}_{\nu_1,\nu_2}$ das Product aus k_a und einer Potenzreihe von k_1^2, k_2^2.

Allgemein ist nach § 4

$$x_a = \sum_{\nu_1,\nu_2} \sum_{p_1,p_2} A\, k_1^{p_1} k_2^{p_2} \cos(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2),$$
$$|\nu_1| = p_1 - 2m_1, \qquad |\nu_2| = p_2 - 2m_2.$$

Da in der Entwickelung von x_1 nur ungerade p_1 und gerade p_2 auftreten, kommen auch nur ungerade ν_1 und gerade ν_2 vor, während die Entwickelung von x_2 nur gerade ν_1 und ungerade ν_2 enthält.

Man findet

$$x_1 = k_1 \cos u_1 + \frac{k_1^3}{16p^2} (\cos u_1 - \cos 3u_1)$$
$$+ \frac{k_1 k_2^2}{8q(p-q)} \sqrt{\frac{q}{p}} (\cos(u_1 + 2u_2) - \cos(u_1 - 2u_2)) + \cdots,$$

$$x_2 = k_2 \cos u_2 + \frac{k_2^3}{16q^2} (\cos u_2 - \cos 3u_2)$$
$$+ \frac{k_1^2 k_2}{8p(q-p)} \sqrt{\frac{p}{q}} (\cos(2u_1 + u_2) - \cos(2u_1 - u_2)) + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder mindestens von der Dimension 5 in k_1, k_2 sind.

Ist für $t = 0$

$$x_a = c_a, \qquad x'_a = c'_a \text{ *)} \qquad (a = 1, 2)$$

und setzt man

$$v_1 = \varrho_1 t, \qquad v_2 = \varrho_2 t,$$

so ist

---

*) Zur Abkürzung setzen wir

$$\bar{c}_1 = \sqrt{\frac{p}{g}}\, c'_1, \qquad \bar{c}_2 = \sqrt{\frac{q}{g}}\, c'_2.$$

$$x_1 = c_1 \cos v_1 + \bar{c}_1 \sin v_1$$
$$+ \left(\frac{c_1^3}{16p^2} - \frac{3c_1\bar{c}_1^2}{16p} + \frac{c_2\bar{c}_1\bar{c}_2}{2(p-q)}\right)\cos v_1$$
$$+ \left(\frac{13c_1\bar{c}_1}{16p^2} - \frac{c_1c_2\bar{c}_2}{2p(p-q)} - \frac{c_2^2\bar{c}_1}{2q(p-q)} + \frac{\bar{c}_1^3}{16p} + \frac{\bar{c}_1\bar{c}_2^2}{2(p-q)}\right)\sin v_1$$
$$- \frac{c_1(c_1^2-3c_1^2)}{16p^2}\cos 3v_1 + \frac{\bar{c}_1(\bar{c}_1^2-3c_1^2)}{16p^2}\sin 3v_1$$
$$+ \frac{\sqrt{\frac{q}{p}}}{8q(p-q)}\{(c_1c_2^2 - c_1\bar{c}_2^2 - 2c_2\bar{c}_1\bar{c}_2)\cos(v_1+2v_2)$$
$$- (c_1c_2^2 - c_1\bar{c}_2^2 + 2c_2\bar{c}_1\bar{c}_2)\cos(v_1-2v_2)$$
$$+ (\bar{c}_1c_2^2 - \bar{c}_1\bar{c}_2^2 + 2c_1c_2\bar{c}_2)\sin(v_1+2v_2)$$
$$- (\bar{c}_1c_2^2 - \bar{c}_1\bar{c}_2^2 - 2c_1c_2\bar{c}_2)\sin(v_1-2v_2)\} + \cdots;$$
$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{g}{p}}\left(1 - \frac{c_1^2+\bar{c}_1^2}{4p^2} + \cdots\right);$$

x_2 erhält man aus x_1 und ϱ_2 aus ϱ_1, indem man $v_1, v_2, c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2\, p, q$ durch $v_2, v_1, c_2, c_1, \bar{c}_2, \bar{c}_1\, q, p$ ersetzt.

Durch Nullsetzen von k_2 erhält man die periodische Bewegung

$$x_1 = k_1\cos u_1 + \frac{k_1^3}{16p^2}(\cos u_1 - \cos 3u_1) + \cdots,\quad x_2 = 0$$

auf der Parabel $y = 0,\ x^2 = 2pz$; durch Nullsetzen von k_1 die periodische Bewegung

$$x_1 = 0,\ x_2 = k_2\cos u_2 + \frac{k_2^3}{16q^2}(\cos u_2 - \cos 3u_2) + \cdots$$

auf der Parabel $x = 0,\ y^2 = 2qz$.

Weitere periodische Bewegungen ergeben sich nach § 5.

Zweiter Theil.

§ 7.

Es mögen jetzt T und U die am Anfang der Einleitung angegebene allgemeinere Form haben, so dass die *Lagrange*schen Differentialgleichungen der Bewegung die Gestalt

$$x_\alpha'' + \lambda_\alpha^2 x_\alpha = F_\alpha(x_1', \ldots, x_n';\ x_1, \ldots, x_n) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(\alpha = 1, \ldots, n)$$

annehmen, worin F_α eine quadratische Form von $x_1', \ldots, x_n'$ ist, deren Coefficienten Potenzreihen von $x_1, \ldots, x_n$ sind, und G_α eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$.

Unter der Voraussetzung, dass zwischen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ keine lineare Relation $g_1 \lambda_1 + \cdots + g_n \lambda_n = 0$ mit ganzzahligen Coefficienten $g_1, \ldots, g_n$ besteht*), zeigen wir, dass unsere Differentialgleichungen formell befriedigt werden, *wenn man für x_α eine Reihe*

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(p)} + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

setzt; darin ist $x_\alpha^{(p)}$ eine ganze homogene Function p-ten Grades von n Integrationsconstanten $k_1, \ldots, k_n$ und eine periodische Function von n Argumenten $u_1, \ldots, u_n$ mit der Periode 2π in Bezug auf jedes dieser Argumente; es ist

$$u_\alpha = \varrho_\alpha t + l_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

$$\varrho_\alpha = \lambda_\alpha + \varrho_\alpha^{(2)} + \varrho_\alpha^{(4)} + \cdots,$$

wo $\varrho_\alpha^{(2)}, \varrho_\alpha^{(4)}, \ldots$ ganze homogene Functionen 2., 4., ... Dimension von $k_1, \ldots, k_n$ sind, während $l_1, \ldots, l_n$ neue Integrationsconstante bezeichnen. Insbesondere ist

$$x_\alpha^{(1)} = k_\alpha \cos u_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).^{**})$$

---

*) Diese Voraussetzung brauchte im ersten Theil nicht gemacht zu werden.

**) Stellt man $H = T - U$ als Function von

$$x_\alpha, y_\alpha = \frac{\partial T}{\partial x_\alpha'} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

dar:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha^2 x_\alpha^2 + \cdots,$$

so hat man die *Hamilton*schen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \qquad \frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Setzt man

$$x_\alpha = \frac{\xi_\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha}}, \qquad y_\alpha = \eta_\alpha \sqrt{\lambda_\alpha},$$

so wird

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha (\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2) + \cdots,$$

und die Differentialgleichungen lauten

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_\alpha}, \qquad \frac{d\eta_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Wir verstehen jetzt unter H eine Potenzreihe der ξ, η, welche ausser den angeschriebenen quadratischen Gliedern beliebige Glieder höherer Dimension enthält.

Die Möglichkeit der formalen Berechnung unserer Reihen aus einem solchen Differentialgleichungssystem ist nicht ohne weiteres ersichtlich; deshalb hat *Poincaré* zuerst auf Umwegen die formale Existenz der Reihen bewiesen, bevor er zu ihrer directen

Zum Beweise führen wir die *Lagrange*schen Gleichungen, indem wir

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_i \varrho_i \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i} \qquad (i=1,\ldots,n),$$

$$\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = \sum_{hi} \varrho_h \varrho_i \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_h \partial u_i} \qquad (h,i=1,\ldots,n)$$

setzen, über in

$$\sum_{hi} \varrho_h \varrho_i \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_h \partial u_i} + \lambda_\alpha^2 x_\alpha$$

$$= F_\alpha\left(\sum_i \varrho_i \frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \ldots; x_1, \ldots\right) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

Setzt man hierin für $x_1, \ldots, x_n$ und $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die oben aufgestellten Reihen und vergleicht man die in Bezug auf $k_1, \ldots, k_n$ linearen Glieder, so erhält man die Gleichungen

$$\sum_{hi} \lambda_h \lambda_i \frac{\partial^2 x_\alpha^{(1)}}{\partial u_h \partial u_i} + \lambda_\alpha^2 x_\alpha^{(1)} = 0,$$

welche durch die oben angegebenen Werthe

$$x_\alpha^{(1)} = k_\alpha \cos u_\alpha$$

befriedigt werden.

Wenn man

$$F_\alpha = \sum_{hi} \mathfrak{a}_{hi}^{(\alpha)} x_h' x_i' + \cdots,$$

$$G_\alpha = \sum_{hi} \mathfrak{b}_{hi}^{(\alpha)} x_h x_i + \cdots$$

Berechnung überging (Mécanique céleste, Bd. II, S. 160—165, 190—193; Sur l'intégration du problème des trois corps (probl. *F*), Bulletin astronomique, Bd. 14). In unserem Falle lässt sich jedoch im Anschluss an die *Lagrange*schen Differentialgleichungen die formale Berechnung der Reihen so ausführen, dass man aus der Art der Berechnung ohne weiteres deren Möglichkeit erkennt. Dies zu zeigen, ist der Zweck des gegenwärtigen Paragraphen. — Uebrigens kommt das obige Differentialgleichungssystem in *Poincarés* Mécanique céleste nur nebenbei vor, während es sich hauptsächlich um das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

handelt, wo

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots$$

und μ ein kleiner Parameter, F_0 eine Function der x allein, $F_1, F_2, \ldots$ Functionen der x und periodische Functionen der y mit der Periode 2π sind. Vgl. die Kapitel 8—15 des zweiten Bandes über die *Lindstedt*schen Reihen.

und

$$\mathfrak{A}_{hi}^{(a)} = \frac{\mathfrak{b}_{hi}^{(a)} - \mathfrak{a}_{hi}^{(a)} \lambda_h \lambda_i}{2}, \quad \mathfrak{B}_{hi}^{(a)} = \frac{\mathfrak{b}_{hi}^{(a)} + \mathfrak{a}_{hi}^{(a)} \lambda_h \lambda_i}{2}$$

setzt, ergiebt die Vergleichung der in $k_1, \ldots, k_n$ quadratischen Glieder für $x_a^{(2)}$ die Differentialgleichung

$$\sum_{hi} \lambda_h \lambda_i \frac{\partial^2 x_a^{(2)}}{\partial u_h \partial u_i} + \lambda_a^2 x_a^{(2)}$$

$$= \sum_{hi} k_h k_i \left(\mathfrak{A}_{hi}^{(a)} \cos(u_h + u_i) + \mathfrak{B}_{hi}^{(a)} \cos(u_h - u_i)\right)$$

mit der particulären Lösung

$$x_a^{(2)} = -\sum_{hi} k_h k_i \left(\frac{\mathfrak{A}_{hi}^{(a)} \cos(u_h + u_i)}{(\lambda_h + \lambda_i)^2 - \lambda_a^2} + \frac{\mathfrak{B}_{hi}^{(a)} \cos(u_h - u_i)}{(\lambda_h - \lambda_i)^2 - \lambda_a^2}\right),$$

vorausgesetzt, dass keiner der Nenner

$$(\lambda_h \pm \lambda_i)^2 - \lambda_a^2$$

verschwindet.

Allgemein ist, wie wir sogleich zeigen werden,

$$x_a^{(p)} = \Sigma k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n} \{\Sigma A \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)\},$$

wo die äussere Summe über die ganzzahligen positiven Werthe von $p_1, \ldots, p_n$ mit der Summe $p_1 + \cdots + p_n = p$ und die innere Summe über die ganzen positiven und negativen Werthe von $\nu_1, \ldots, \nu_n$ erstreckt wird, welche die Bedingung

$$|\nu_\beta| = p_\beta - 2m_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

(m_β ganze positive Zahl einschliesslich Null) erfüllen. Die Differenz

$$p_1 + \cdots + p_n - (|\nu_1| + \cdots + |\nu_n|) = p - (|\nu_1| + \cdots + |\nu_n|)$$

ist eine gerade Zahl (einschliesslich Null). Demnach treten in $x_a^{(p)}$, wenn p gerade ist, nur Glieder mit $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$ auf, in welchen $|\nu_1| + \cdots + |\nu_n|$ gerade ist. Ist dagegen p ungerade, so erscheinen nur Glieder mit $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$, in welchen $|\nu_1| + \cdots + |\nu_n|$ ungerade ist. Da $p_\beta \geqq |\nu_\beta|$ ist, so ist der Factor von $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$ stets durch $k_1^{|\nu_1|} \ldots k_n^{|\nu_n|}$ theilbar. — Wir werden ferner zeigen, dass $\varrho_a^{(p)}$ im Falle eines geraden $p = 2q$ eine ganze homogene Function q-ten Grades von $k_1^2, \ldots, k_n^2$ ist.

Bevor wir die Richtigkeit des für $x_a^{(p)}$ aufgestellten Ausdrucks beweisen, zeigen wir noch, dass das Product mehrerer Ausdrücke von der für $x_a^{(p)}$ angegebenen Form ein Ausdruck von derselben Form ist. Es sei $x_{a'}^{(p')}$ eine Summe von Gliedern

$$A' k_1^{p'_1} \ldots k_n^{p'_n} (\cos \nu'_1 u_1 + \cdots + \nu'_n u_n)$$

mit $p'_1+\cdots+p'_n=p'$, $|\nu'_\beta|=p'_\beta-2m'_\beta$ und $x_{\alpha''}^{(p'')}$ eine Summe von Gliedern

$$A''\,k_1^{p''_1}\ldots k_n^{p''_n}\cos(\nu''_1\,u_1+\cdots+\nu''_n\,u_n)$$

mit $p''_1+\cdots+p''_n=p''$, $|\nu''_\beta|=p''_\beta-2m''_\beta$ (m'_β, m''_β ganze positive Zahlen einschliesslich Null). Das Product der beiden angeschriebenen Glieder von $x_{\alpha'}^{(p')}$ und $x_{\alpha''}^{(p'')}$ ist gleich

$$\frac{1}{2}A'\,A''\,k_1^{p_1}\ldots k_n^{p_n}\{\cos((\nu'_1+\nu''_1)\,u_1+\cdots+(\nu'_n+\nu''_n)\,u_n)$$
$$+\cos((\nu'_1-\nu''_1)\,u_1+\cdots+(\nu'_n-\nu''_n)\,u_n)\};$$

dabei ist $p'_\beta+p''_\beta=p_\beta$, $p_1+\cdots+p_n=p'+p''=p$, ferner sowohl $|\nu'_\beta+\nu''_\beta|$ als auch $|\nu'_\beta-\nu''_\beta|$ gleich p_β vermindert um eine gerade Zahl. Das Product $x_{\alpha'}^{(p')}\cdot x_{\alpha''}^{(p'')}$ enthält also nur Glieder

$$A\,k_1^{p_1}\ldots k_n^{p_n}\cos(\nu_1\,u_1+\cdots+\nu_n\,u_n)$$

mit $p_1+\cdots+p_n=p$, $|\nu_\beta|=p_\beta-2m_\beta$ (m_β ganze Zahl). Glieder mit $\cos u_\beta$ können im Product nur auftreten, wenn p ungerade ist. — Für ein Product von mehr als zwei Factoren gilt Entsprechendes; ebenso für ein Product, in welchem *zwei* Factoren $x_{\alpha'}^{(p')}$, $x_{\alpha''}^{(p'')}$ durch partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial x_{\alpha'}^{(p')}}{\partial u_{i'}}$, $\frac{\partial x_{\alpha''}^{(p'')}}{\partial u_{i''}}$ ersetzt werden. Dasselbe gilt für ein Product der letzteren Art, welches noch mit einer ganzen Function von $k_1^2,\ldots,k_n^2$ multiplicirt ist, sowie für eine Ableitung zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial u_h\,\partial u_i}$ multiplicirt mit einer ganzen Function von $k_1^2,\ldots,k_n^2$.

Wir zeigen jetzt, dass das oben aufgestellte Bildungsgesetz für $x_\alpha^{(p)}$ gilt, wenn das entsprechende Gesetz für $x_\alpha^{(1)}, x_\alpha^{(2)},\ldots,x_\alpha^{(p-1)}$ richtig ist. Wir setzen $\varrho_\alpha^{(r)}$ $(r<p-1)$ als bekannt voraus und berechnen $\varrho_\alpha^{(p-1)}$, falls p ungerade ist.

Zur Bestimmung von $x_\alpha^{(p)}$ dient die Differentialgleichung

$$\sum_{hi}\lambda_h\,\lambda_i\,\frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial u_h\,\partial u_i}+\sum_{hi}(\lambda_h\,\varrho_i^{(2)}+\lambda_i\,\varrho_h^{(2)})\,\frac{\partial^2 x_\alpha^{(p-2)}}{\partial u_h\,\partial u_i}+\cdots+\lambda_\alpha^2\,x_\alpha^{(p)}=\cdots.$$

Auf der rechten Seite stehen Glieder

$$C\,x_{\alpha'}^{(p')}\,x_{\alpha''}^{(p'')}\ldots \qquad (p'+p''+\cdots=p)$$

sowie Glieder

$$C\,\varrho_{i'}^{(2m')}\,\varrho_{i''}^{(2m'')}\,\frac{\partial x_{\alpha'}^{(p')}}{\partial u_{i'}}\,\frac{\partial x_{\alpha''}^{(p'')}}{\partial u_{i''}}\,x_{\alpha'''}^{(p''')}\ldots$$
$$(2m'+2m''+p'+p''+p'''+\cdots=p).$$

Wenn p ungerade ist, so ist das vorletzte Glied der linken Seite gleich

$$\sum_{hi} (\lambda_h \varrho_i^{(p-1)} + \varrho_h^{(2)} \varrho_i^{(p-2)} + \cdots) \frac{\partial^2 x_\alpha^{(1)}}{\partial u_h \partial u_i}$$

oder nach Einsetzung von $x_\alpha^{(1)} = k_\alpha \cos u_\alpha$ gleich

$$-(\lambda_\alpha \varrho_\alpha^{(p-1)} + \varrho_\alpha^{(2)} \varrho_\alpha^{(p-3)} + \cdots + \varrho_\alpha^{(p-1)} \lambda_\alpha) k_\alpha \cos u_\alpha.$$

Jedes Glied der linken Seite mit Ausnahme des ersten, vorletzten und letzten ist gleich einer Ableitung zweiter Ordnung einer der Functionen $x_\alpha^{(p-2)}, \ldots, x_\alpha^{(2)}$ multiplicirt mit einer ganzen Function bereits bekannter Grössen

$$\varrho_\alpha^{(2)}, \varrho_\alpha^{(4)}, \ldots, \varrho_\alpha^{(p-3)},$$

d. h. mit einer ganzen Function von $k_1^2, \ldots, k_n^2$.

Hat man im Falle eines ungeraden p $\varrho_\alpha^{(2)}, \ldots, \varrho_\alpha^{(p-3)}$ berechnet und $x_\alpha^{(2)}, \ldots, x_\alpha^{(p-1)}$ in der oben vorausgesetzten Form gefunden, so erhält unsere Differentialgleichung die Gestalt

$$\sum_{hi} \lambda_h \lambda_i \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial u_h \partial u_i} + \lambda_\alpha^2 x_\alpha^{(p)} = \Sigma k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n} \{\Sigma \mathfrak{A} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)\},$$

wo $p_1, \ldots, p_n$ und $\nu_1, \ldots, \nu_n$ dieselben Werthe annehmen wie in der oben für $x_\alpha^{(p)}$ angegebenen Entwicklung. Auf der rechten Seite tritt das Glied

$$2 \lambda_\alpha \varrho_\alpha^{(p-1)} k_\alpha \cos u_\alpha$$

mit der noch unbekannten Grösse $\varrho_\alpha^{(p-1)}$ auf; wir greifen auch die bekannten Glieder mit dem Factor $\cos u_\alpha$ heraus:

$$\Sigma \mathfrak{a} k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n} \cos u_\alpha,$$

worin p_α eine ungerade, $p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, p_{\alpha+1}, \ldots, p_n$ gerade Zahlen sind, oder anders geschrieben:

$$k_\alpha \cos u_\alpha \Sigma \mathfrak{a} k_1^{2q_1} \ldots k_n^{2q_n} \qquad \left(q_1 + \cdots + q_n = \frac{p-1}{2}\right).$$

Man bestimmt $\varrho_\alpha^{(p-1)}$ so, dass die Glieder mit $\cos u_\alpha$ auf der rechten Seite der Differentialgleichung für $x_\alpha^{(p)}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ fortfallen; man findet

$$\varrho_\alpha^{(p-1)} = -\frac{1}{2\lambda_\alpha} \Sigma \mathfrak{a} k_1^{2q_1} \ldots k_n^{2q_n}$$

als ganze Function von $k_1^2, \ldots, k_n^2$. Dann ergiebt sich

$$x_\alpha^{(p)} = -\Sigma k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n} \left\{\Sigma \frac{\mathfrak{A} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)}{(\nu_1 \lambda_1 + \cdots + \nu_n \lambda_n)^2 - \lambda_\alpha^2}\right\},$$

d. i. ein Ausdruck von der oben angegebenen Gestalt, vorausgesetzt, dass keiner der Nenner verschwindet. Rechts fehlt die Combination

$$\nu_1 = 0, \ldots, \nu_{\alpha-1} = 0, \nu_\alpha = 1, \nu_{\alpha+1} = 0, \ldots, \nu_n = 0,$$

da ja der Coefficient von $\cos u_\alpha$ gleich Null gesetzt wurde.

Im Falle eines ungeraden p kommen in der Differentialgleichung für $x_\alpha^{(p)}$ Glieder mit $\cos u_1, \ldots, \cos u_n$ nicht vor, und es treten nur die als bereits bekannt vorausgesetzten Grössen auf; $x_\alpha^{(p)}$ erscheint in derselben Form wie vorhin.

Wir haben vorausgesetzt, dass keiner der Nenner

$$(\nu_1 \lambda_1 + \cdots + \nu_n \lambda_n)^2 - \lambda_\alpha^2 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

verschwindet, wo $\nu_1, \ldots, \nu_n$ positive und negative ganze Zahlen einschliesslich Null sind; die Verbindung $\nu_\alpha = 1, \nu_\beta = 0$ $(\beta \leqq \alpha)$ ist ausgeschlossen. Wir können diese Voraussetzung so aussprechen:

Es besteht keine Relation

$$g_1 \lambda_1 + \cdots + g_n \lambda_n = 0,$$

wo $g_1, \ldots, g_n$ positive oder negative ganze Zahlen einschliesslich Null sind (natürlich mit Ausschluss von $g_1 = 0, \ldots, g_n = 0$).

Bei der Art, wie oben die particuläre Lösung der Differentialgleichung für $x_\alpha^{(p)}$ gewählt wurde, kommen in $x_\alpha^{(p)}$ $(p > 1)$ Glieder mit $\cos u_\alpha$ nicht vor. Uebrigens wird die oben angegebene Gestalt der Reihen nicht geändert, wenn man für $p = 3, 5, \ldots$ die oben gewählte particuläre Lösung $x_\alpha^{(p)}$ um

$$\cos u_\alpha \{\Sigma A k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n}\}$$

vermehrt, wo $p_1 + \cdots + p_n = p$ und $p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, p_{\alpha+1}, \ldots, p_n$ gerade, p_α ungerade ist. Wir wollen jedoch von der Zufügung eines solchen Ausdrucks zu $x_\alpha^{(p)}$ absehen.

§ 8.

Die in § 7 hergeleiteten Reihen lassen sich ähnlich umformen wie die in § 3 und § 4 erhaltenen Reihen des specielleren Problems.

Setzt man in $x_\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} x_\alpha^{(p)}$ den für $x_\alpha^{(p)}$ gefundenen Ausdruck ein, so erhält man

$$x_\alpha = \sum_{p_1, \ldots, p_n} k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n} \Big\{ \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}{}' A \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n) \Big\},$$

wo $p_1, \ldots, p_n$ ganze positive Zahlen (einschliesslich Null) sind und die mit $k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n}$ multiplicirte Summe über die ganzzahligen positiven und negativen Werthe von $\nu_1, \ldots, \nu_n$ erstreckt wird, für welche $|\nu_\beta| = p_\beta - 2m_\beta$ (m_β ganze positive Zahl einschliesslich Null) ist.

Durch Umstellung der Glieder erscheint x_α in Form einer trigonometrischen Reihe von $u_1, \ldots, u_n$, deren Coefficienten Potenzreihen von $k_1, \ldots, k_n$ sind:

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \Big\{ \sum_{m_1, \ldots, m_n} A\, k_1^{|\nu_1|+2m_1} \ldots k_n^{|\nu_n|+2m_n} \Big\} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n).$$

Hierin sind $\nu_1, \ldots, \nu_n$ positive und negative, $m_1, \ldots, m_n$ positive ganze Zahlen (einschliesslich Null). Bei der Art, wie die Reihe für x_α in § 7 hergeleitet wurde, reducirt sich der Factor von $\cos u_\alpha$ auf k_α, da $\cos u_\alpha$ in $x_\alpha^{(p)}$ $(p > 1)$ nicht auftritt.*)

Formal lässt sich x_α in eine Potenzreihe der $2n$ Argumente

$$k_\beta \cos u_\beta, \quad k_\beta \sin u_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

umwandeln.

Wie in § 4 vollzieht sich die Einführung der neuen Integrationsconstanten

$$k'_\alpha = k_\alpha \cos l_\alpha, \quad k'_{n+\alpha} = k_\alpha \sin l_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

oder

$$c_1, \ldots, c_n;\ c'_1, \ldots, c'_n$$

---

*) Bei der Art, wie die Constanten $k_1, \ldots, k_n$ im ersten Theil eingeführt wurden, hat $\cos u_\alpha$ in der Reihe für x_α (§ 3) einen Coefficienten von der Form

$$k_\alpha (1 + \mathfrak{p}_\alpha (k_1^2, \ldots, k_n^2)),$$

wo $\mathfrak{p}_\alpha$ eine Potenzreihe der beigefügten Argumente ohne constantes Glied darstellt. Wir führen an Stelle von $k_1, \ldots, k_n$ neue Constante $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_n$ ein:

$$\mathfrak{k}_\alpha = k_\alpha (1 + \mathfrak{p}_\alpha (k_1^2, \ldots, k_n^2)).$$

Hieraus erhält man k_α in der Form

$$k_\alpha = \mathfrak{k}_\alpha (1 + \mathfrak{q}_\alpha (\mathfrak{k}_1^2, \ldots, \mathfrak{k}_n^2)),$$

wo $\mathfrak{q}_\alpha$ eine Potenzreihe der beigefügten Argumente ohne constantes Glied ist. Hiernach ist der Coefficient von $\cos u_\alpha$ in der Reihe für x_α gleich $\mathfrak{k}_\alpha$, der Coefficient von $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$ gleich $\mathfrak{P}^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \mathfrak{k}_1^{|\nu_1|} \ldots \mathfrak{k}_n^{|\nu_n|}$, wo $\mathfrak{P}^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ eine Potenzreihe von $\mathfrak{k}_1^2, \ldots, \mathfrak{k}_n^2$ ist. Ist in § 4 die Potenzreihe $P^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ für hinreichend kleine $k_1^2, \ldots, k_n^2$ convergent, so convergirt auch die Potenzreihe $\mathfrak{P}^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ für hinreichend kleine Werthe von $\mathfrak{k}_1^2, \ldots, \mathfrak{k}_n^2$.

($x_\alpha = c_\alpha$, $x'_\alpha = c'_\alpha$ für $t = 0$). Man erkennt, dass sich x_α und x'_α als Potenzreihen von $c_1, \ldots, c_n; c'_1, \ldots, c'_n$ darstellen lassen, deren Coefficienten periodische Functionen der n Argumente

$$v_1 = \varrho_1 t, \ldots, v_n = \varrho_n t$$

mit der Periode 2π in Bezug auf jedes sind; $\varrho_\alpha = \lambda_\alpha + \cdots$ ist eine Potenzreihe der c, c' ohne lineare Glieder. Nachdem die formale Existenz solcher Reihen nachgewiesen ist, können sie unmittelbar aus den *Lagrange*schen Differentialgleichungen berechnet werden.

Wir setzen

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(p)} + \cdots,$$
$$x'_\alpha = y_\alpha^{(1)} + y_\alpha^{(2)} + \cdots + y_\alpha^{(p)} + \cdots;$$

$x_\alpha^{(p)}$ und $y_\alpha^{(p)}$ sind ganze homogene Functionen p-ter Dimension der $2n$ Constanten c, c' und periodische Functionen von

$$v_\beta = \varrho_\beta t = (\lambda_\beta + \varrho_\beta^{(2)} + \varrho_\beta^{(3)} + \cdots) t \qquad (\beta = 1, \ldots, n);$$

$\varrho_\beta^{(p)}$ ist eine ganze homogene Function p-ter Dimension der c, c'.*) Für $t = 0$ ist

$$x_\alpha^{(1)} = c_\alpha, \; x_\alpha^{(2)} = 0, \; x_\alpha^{(3)} = 0, \ldots$$
$$y_\alpha^{(1)} = c'_\alpha, \; y_\alpha^{(2)} = 0, \; y_\alpha^{(3)} = 0, \ldots \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Die *Lagrange*schen Gleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x'_\alpha,$$
$$\frac{dx'_\alpha}{dt} + \lambda_\alpha^2 x_\alpha = F_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n; \; x_1, \ldots, x_n) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

gehen, wenn man

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \varrho_i \frac{\partial x_\alpha}{\partial v_i}, \quad \frac{dx'_\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \varrho_i \frac{\partial x'_\alpha}{\partial v_i}$$

setzt, über in

$$\sum_i \varrho_i \frac{\partial x_\alpha}{\partial v_i} = x'_\alpha,$$

$$\sum \varrho_i \frac{\partial x'_\alpha}{\partial v_i} + \lambda_\alpha^2 x_\alpha = F_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n; \; x_1, \ldots, x_n) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Nach Einsetzung der Reihe für x_α, x'_α und ϱ_i vergleichen wir die Glieder erster, zweiter, ..., p-ter Dimension in Bezug auf die c, c'.

---

*) Natürlich haben jetzt $x_\alpha^{(p)}$ und $\varrho_\alpha^{(p)}$ eine andere Bedeutung als in § 7.

Die Vergleichung der linearen Glieder ergiebt die Differentialgleichungen

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial x_\alpha^{(1)}}{\partial v_i} = y_\alpha^{(1)},$$

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial y_\alpha^{(1)}}{\partial v_i} + \lambda_\alpha^2 x_\alpha^{(1)} = 0$$

mit der Lösung

$$x_\alpha^{(1)} = c_\alpha \cos v_\alpha + \frac{c'_\alpha}{\lambda_\alpha} \sin v_\alpha,$$

$$y_\alpha^{(1)} = -c_\alpha \lambda_\alpha \sin v_\alpha + c'_\alpha \cos v_\alpha, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

welche die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen erfüllt.

Wir wissen bereits, dass sich für $x_\alpha^{(p)}$, $y_\alpha^{(p)}$ Ausdrücke von der Form

$$x_\alpha^{(p)} = \Sigma A \cos(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n) + \Sigma B \sin(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n),$$

$$y_\alpha^{(p)} = \Sigma A' \cos(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n) + \Sigma B' \sin(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n)$$

ergeben müssen; hierbei sind $\nu_1, \ldots, \nu_n$ ganze Zahlen, welche die Bedingung $|\nu_1| + \cdots + |\nu_n| \leqq p$ erfüllen; A, B, A', B' sind ganze homogene Functionen p-ter Dimension der c, c'. Wir setzen

$$x_\alpha^{(1)}, \ldots, x_\alpha^{(p-1)};\ y_\alpha^{(1)}, \ldots, y_\alpha^{(p-1)};\ \varrho_\alpha^{(2)}, \ldots, \varrho_\alpha^{(p-2)}$$

als bekannt voraus und bestimmen

$$x_\alpha^{(p)},\ y_\alpha^{(p)},\ \varrho_\alpha^{(p-1)}.$$

Wir haben die Differentialgleichungen

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial x_\alpha^{(p)}}{\partial v_i} + \sum_i \varrho_i^{(2)} \frac{\partial x_\alpha^{(p-2)}}{\partial v_i} + \cdots + \sum_i \varrho_i^{(p-1)} \frac{\partial x_\alpha^{(1)}}{\partial v_i} = y_\alpha^{(p)},$$

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial y_\alpha^{(p)}}{\partial v_i} + \sum_i \varrho_i^{(2)} \frac{\partial y_\alpha^{(p-2)}}{\partial v_i} + \cdots + \sum_i \varrho_i^{(p-1)} \frac{\partial y_\alpha^{(1)}}{\partial v_i} + \lambda_\alpha^2 x_\alpha^{(p)} = Q_\alpha;$$

Q_α ist eine Summe von Gliedern Const. $x_{\alpha_1}^{(q_1)} \ldots x_{\alpha_r}^{(q_r)}$ $(r \geqq 2,\ q_1 + \cdots + q_n = p)$, wo auch *zwei* der Factoren x durch y ersetzt sein können. Setzt man für die bereits berechneten Grössen ihre Ausdrücke ein, so erhalten die Differentialgleichungen die Form

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial x_\alpha^{(p)}}{\partial v_i} = y_\alpha^{(p)} + \Sigma \mathfrak{A} \cos(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n) + \Sigma \mathfrak{B} \sin(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n),$$

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial y_\alpha^{(p)}}{\partial v_i} + \lambda_\alpha^2 x_\alpha^{(p)} = \Sigma \mathfrak{A}' \cos(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n) + \Sigma \mathfrak{B}' \sin(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n),$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ ganze homogene Functionen p-ten Grades der c, c' darstellen. Auf der rechten Seite der ersten bezw. zweiten Gleichung kommen die Glieder

$$\varrho_\alpha^{(p-1)}\left(c_\alpha \sin v_\alpha - \frac{c'_\alpha}{\lambda_\alpha}\cos v_\alpha\right) + \mathfrak{a}_\alpha \cos v_\alpha + \mathfrak{b}_\alpha \sin v_\alpha,$$

$$\varrho_\alpha^{(p-1)}\left(c_\alpha \lambda_\alpha \cos v_\alpha + c'_\alpha \sin v_\alpha\right) + \mathfrak{a}'_\alpha \cos v_\alpha + \mathfrak{b}'_\alpha \sin v_\alpha$$

vor, wo $\mathfrak{a}_\alpha, \ldots, \mathfrak{b}'_\alpha$ ganze homogene Functionen p-ten Grades der c, c' sind. Damit sich $x_\alpha^{(p)}$, $y_\alpha^{(p)}$ als periodische Functionen der v von der bekannten Form ergeben, muss

$$2\, c_\alpha \varrho_\alpha^{(p-1)} + \mathfrak{b}_\alpha + \frac{\mathfrak{a}'_\alpha}{\lambda_\alpha} = 0,$$

$$2\,\frac{c'_\alpha}{\lambda_\alpha}\varrho_\alpha^{(p-1)} = \mathfrak{a}_\alpha - \frac{\mathfrak{b}'_\alpha}{\lambda_\alpha}$$

sein;*) die beiden Gleichungen müssen für $\varrho_\alpha^{(p-1)}$ dieselbe homogene Function p-ten Grades der c, c' liefern.**) Die Coefficienten A, B, A', B' in den Entwicklungen von $x_\alpha^{(p)}$ und $y_\alpha^{(p)}$ ergeben sich jetzt aus den Gleichungen

$$B(\nu_1\lambda_1 + \cdots + \nu_n\lambda_n) - A' = \mathfrak{A}, \quad -\lambda_\alpha^2 B + A'(\nu_1\lambda_1 + \cdots + \nu_n\lambda_n) = -\mathfrak{B}';$$

$$A(\nu_1\lambda_1 + \cdots + \nu_n\lambda_n) + B' = -\mathfrak{B}, \quad \lambda_\alpha^2 A + B'(\nu_1\lambda_1 + \cdots + \nu_n\lambda_n) = \mathfrak{A}'$$

---

*) Durch Einsetzung der Ausdrücke

$$x = a\cos v_\alpha + b\sin v_\alpha + \cdots,$$
$$y = a'\cos v_\alpha + b'\sin v_\alpha + \cdots$$

in die Differentialgleichungen

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial x}{\partial v_i} = y + \mathfrak{a}\cos v_\alpha + \mathfrak{b}\sin v_\alpha + \cdots,$$

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial y}{\partial v_i} = -\lambda_\alpha^2 x + \mathfrak{a}'\cos v_\alpha + \mathfrak{b}'\sin v_\alpha + \cdots$$

und Vergleichung der Coefficienten von $\cos v_\alpha$ und $\sin v_\alpha$ erhält man die Gleichungen

$$\lambda_\alpha b - a' = \mathfrak{a}, \quad \lambda_\alpha a + b' = -\mathfrak{b},$$

$$\lambda_\alpha a + b' = \frac{\mathfrak{a}'}{\lambda_\alpha}, \quad \lambda_\alpha b - a' = \frac{\mathfrak{b}'}{\lambda_\alpha},$$

welche nur bestehen können, wenn

$$\mathfrak{b} + \frac{\mathfrak{a}'}{\lambda_\alpha} = 0, \quad \mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{b}'}{\lambda_\alpha} = 0$$

ist.

**) Die angegebene Berechnungsweise der Reihen trägt demnach ihre Begründung nicht in sich selbst, sie setzt vielmehr die formale Existenz der Reihen bereits als bewiesen voraus.

als Brüche mit dem Nenner

$$(\nu_1 \lambda_1 + \cdots + \nu_n \lambda_n)^2 - \lambda_\alpha^2,$$

welcher unter den früher gemachten Voraussetzungen nicht verschwindet, wenn man von dem Werthsystem

$$\nu_1 = 0, \ldots, \nu_{\alpha-1} = 0,\ \nu_\alpha = 1,\ \nu_{\alpha+1} = 0, \ldots \nu_n = 0$$

absieht. Versteht man im Falle des letzteren Werthsystems unter $A, \ldots, B'$ die Coefficienten von $\cos v_\alpha$ und $\sin v_\alpha$ in den Entwickelungen von $x_\alpha^{(p)}$ und $y_\alpha^{(p)}$, so sind unter den obigen vier Gleichungen nur zwei unabhängige:

$$\lambda_\alpha B - A' = \mathfrak{A},\ \lambda_\alpha A + B' = -\mathfrak{B}.$$

Die fehlenden Gleichungen ergeben sich daraus, dass $x_\alpha^{(p)} = 0, y_\alpha^{(p)} = 0$ für $t = 0$ sein muss; hiernach verschwindet in den Ausdrücken für $x_\alpha^{(p)}$ und $y_\alpha^{(p)}$ sowohl die Summe aller Coefficienten A als auch die Summe aller Coefficienten A'.

§ 9.

Wir vergleichen die am Anfang von § 8 für x_α angegebene trigonometrische Reihe von $u_1, \ldots, u_n$ mit der von Herrn Korteweg*) aufgestellten Reihenentwickelung.

Wir hatten in § 8

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \{A\, k_1^{|\nu_1| + 2m_1} \ldots k_n^{|\nu_n| + 2m_n}\} \cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n),$$

wo $\nu_1, \ldots, \nu_n$ positive und negative ganze Zahlen, $m_1, \ldots, m_n$ positive ganze Zahlen sind. Der Factor von $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$ ist also eine mit $k_1^{|\nu_1|} \ldots k_n^{|\nu_n|}$ multiplicirte Potenzreihe von $k_1^2, \ldots, k_n^2$. Bei der in § 7 angegebenen Berechnungsweise ist der Coefficient von $\cos u_\alpha$ in x_α gleich k_α; der Coefficient von $\cos u_\beta$ $(\beta \leqq \alpha)$ ist gleich dem Product aus k_β und einer Potenzreihe von $k_1^2, \ldots, k_n^2$, welche für $k_1 = \cdots = k_n = 0$ verschwindet; das von den u freie Glied der trigonometrischen Reihe ist eine für $k_1 = \cdots = k_n = 0$ verschwindende Potenzreihe von $k_1^2, \ldots, k_n^2$.

Setzt man

$$k_1 = C_1 h, \ldots, k_n = C_n h,$$

wo $C_1, \ldots, C_n$ als fest gewählte Werthe und h als willkürliche Constante

---

*) *Korteweg*, sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté (Archives néerlandaises, Ser. 2, Bd. 1; 1898).

betrachtet wird, so geht der Coefficient von $\cos(\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n)$ in eine mit $h^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_n|}$ multiplicirte Potenzreihe von h^2 über, der Coefficient von $\cos u_\alpha$ in x_α ist gleich $C_\alpha h$, der Coefficient von $\cos u_\beta$ $(\beta \leqq \alpha)$ beginnt mit h^3 und enthält nur ungerade Potenzen von h, das von den u freie Glied beginnt mit h^2 und enthält nur gerade Potenzen von h. Ferner ist ϱ_α eine mit λ_α beginnende Potenzreihe von h^2. Damit sind wir zu der Gestalt der Reihen bei *Korteweg* gelangt, wo jedoch nicht hervortritt, dass sich jede der auftretenden Potenzreihen von h als Product aus einer Potenz von h und einer Potenzreihe von h^2 darstellen lässt.

Es möge noch gezeigt werden, wie sich die in dem Aufsatze des Verfassers „Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen“*) nachgewiesenen *periodischen Bewegungen aus den Reihenentwicklungen von* § 7 *und* § 8 *ergeben.*

Setzt man in der allgemeinen Reihe am Anfang von § 9 die $n-1$ Constanten $k_2, \ldots, k_n$ gleich Null, so geht sie in

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} A\, k_1^{|\nu_1|+2m_1} \right\} \cos \nu_1 u_1$$

über; hierin ist $u_1 = \varrho_1 t + l_1$ und $\varrho_1 = \lambda_1 + \cdots$ eine Potenzreihe von k_1^2. In den Coefficienten A traten ursprünglich Divisoren von der Form

$$(\nu_1 \lambda_1 + \cdots + \nu_n \lambda_n)^2 - \lambda_\alpha^2$$

auf, die sämmtlich von Null verschieden sein mussten, wenn die formale Berechnung der früheren Reihen möglich sein sollte. Hier bleiben aber nur die Cosinus derjenigen Argumente $\nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n$ stehen, in welchen $\nu_2 = \cdots = \nu_n = 0$ ist; in den bleibenden Coefficienten A kommen also nur Nenner $\nu_1^2 \lambda_1^2 - \lambda_\alpha^2$ vor, die sämmtlich von Null verschieden sind, wenn keiner der $n-1$ Quotienten

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

eine ganze Zahl ist. Wie am Anfang von § 5 ergeben sich, wenn diese

---

*) Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 48. — Dort waren die Voraussetzungen insofern allgemeiner, als U in der Umgebung der Gleichgewichtslage die Form

$$\frac{1}{2} s_1 x_1^2 + \cdots + \frac{1}{2} s_n x_n^2 + \cdots$$

hatte, wo $s_1, \ldots, s_n$ nur theilweise negativ zu sein brauchten. Vgl. übrigens den Schluss des gegenwärtigen Paragraphen.

Bedingung erfüllt ist, $c_2, \ldots, c_n; c_2', \ldots, c_n'$ als Potenzreihen von c_1, c_1', welche mit quadratischen Gliedern beginnen. Dann ist

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (A_{\nu_1}^{(\alpha)} \cos \nu_1 \varrho_1 t + B_{\nu_1}^{(\alpha)} \sin \nu_1 \varrho_1 t),$$

wo $\varrho_1 = \lambda_1 + \cdots$ eine Potenzreihe von c_1, c_1' ohne lineare Glieder, $A_{\nu_1}^{(\alpha)}$ und $B_{\nu_1}^{(\alpha)}$ Potenzreihen von c_1, c_1' mit Gliedern mindestens ν_1-ten Grades sind. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_1' = 0$ annehmen; dann erhält x_α die Form*)

$$x_\alpha = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} A_{\nu_1}^{(\alpha)} \cos \nu_1 \varrho_1 t;$$

hierin ist $\varrho_1 = \lambda_1 + \cdots$ eine Potenzreihe von c ohne lineares Glied und $A_{\nu_1}^{(\alpha)}$ eine Potenzreihe von c mit Gliedern ν_1-ten und höheren Grades. Die Convergenz dieser Reihe ist in dem früheren Aufsatze bewiesen.

Uebrigens bleiben die Entwicklungen von § 7 ff. mit gewissen Abänderungen bestehen, wenn in der Umgebung der Gleichgewichtslage

$$x_1 = \cdots = x_n = 0$$

die Kräftefunction U eine Entwicklung zulässt:

$$U = \frac{1}{2} (s_1 x_1^2 + \cdots + s_n x_n^2) + \cdots,$$

worin $s_1 = -\lambda_1^2, \ldots, s_m = -\lambda_m^2$ *negativ sind,* $s_{m+1}, \ldots, s_n$ *aber positiv (nicht Null) sein können.*

In diesem Falle ist in der Reihe

$$x_\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} x_\alpha^{(p)}$$

$x_\alpha^{(p)}$ eine ganze homogene Function p-ten Grades von m Constanten $k_1, \ldots, k_m$ und eine periodische Function von m Argumenten $u_1, \ldots, u_m$; es ist

$$u_i = \varrho_i t + l_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

wo $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ Potenzreihen von $k_1, \ldots, k_m$ und $l_1, \ldots, l_m$ neue Integrationsconstante sind. Insbesondere ist

$$x_1^{(1)} = k_1 \cos u_1, \ldots, x_m^{(1)} = k_m \cos u_m, x_{m+1}^{(1)} = 0, \ldots, x_n^{(1)} = 0.$$

---

*) Die Sinusglieder fallen fort, wie man durch directe formale Berechnung der Potenzreihen von c aus den Differentialgleichungen erkennt (vgl. Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 48, S. 420—421).

Darstellung der Bewegungsgleichung für elastische Körper in Vectorform.

(Von Herrn *Victor Fischer* in Stuttgart.)

Die Bewegungsgleichung elastischer Körper, zerlegt nach drei zu einander senkrechten Richtungen $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{f}$, lautet in der bekannten Schreibweise:

$$(1.)\quad \begin{cases} \mu \frac{dv_x}{dt}\mathfrak{i} = \mu X\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\mathfrak{i}, \\ \mu \frac{dv_y}{dt}\mathfrak{j} = \mu Y\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\mathfrak{j}, \\ \mu \frac{dv_z}{dt}\mathfrak{f} = \mu Z\mathfrak{f} + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\mathfrak{f}. \end{cases}$$

Wir addiren diese drei Gleichungen und erhalten

$$(1^a.)\quad \begin{cases} \mu\left(\frac{dv_x}{dt}\mathfrak{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathfrak{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathfrak{f}\right) = \mu\,(X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{f}) + \left(\frac{\partial X_x}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial Y_x}{\partial x}\mathfrak{j} + \frac{\partial Z_x}{\partial x}\mathfrak{f}\right) \\ \qquad + \left(\frac{\partial X_y}{\partial y}\mathfrak{i} + \frac{\partial Y_y}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial Z_y}{\partial y}\mathfrak{f}\right) + \left(\frac{\partial X_z}{\partial z}\mathfrak{i} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\mathfrak{j} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\mathfrak{f}\right). \end{cases}$$

Nun setzen wir

$$\frac{dv_x}{dt}\mathfrak{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathfrak{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \dot{\mathfrak{v}}^*)$$

$$X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{f} = \mathfrak{P}.$$

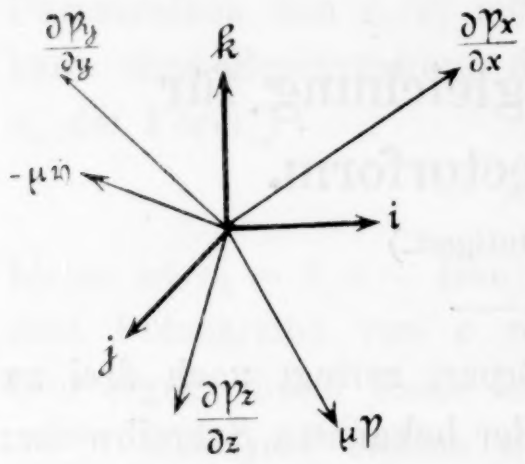
Es ist mithin $\dot{\mathfrak{v}}$ die Beschleunigung in einem bestimmten Punkte des betrachteten Körpers und $\mathfrak{P}$ die äussere Kraft pro Masseneinheit für diesen Punkt.

Ferner sei

$$(2.)\quad \begin{cases} X_x\mathfrak{i} + Y_x\mathfrak{j} + Z_x\mathfrak{f} = \mathfrak{P}_x, \\ X_y\mathfrak{i} + Y_y\mathfrak{j} + Z_y\mathfrak{f} = \mathfrak{P}_y, \\ X_z\mathfrak{i} + Y_z\mathfrak{j} + Z_z\mathfrak{f} = \mathfrak{P}_z. \end{cases}$$

*) Vectoren sind durch fettgedruckte deutsche Buchstaben bezeichnet.

Wir erkennen nun, dass $\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y$ und $\mathfrak{P}_z$ nichts anderes sind als die resultirenden Spannungen pro Flächeneinheit für einen bestimmten Punkt in Bezug auf Ebenen, die parallel sind zur YZ-, ZX- und XY-Ebene, deren Normalen also $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ sind. Wir können daher kürzer sagen, $\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z$ sind die Spannungen für die Richtungen $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$.



Führen wir jetzt diese Bezeichnungen in die Gleichung (1ª.) ein, so erhält sie die folgende Gestalt:

$$(3.)\quad \mu\,\dot{\mathfrak{v}} = \mu\,\mathfrak{P} + \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z}.$$

Für den Fall des Gleichgewichts wird $\dot{\mathfrak{v}} = 0$ und Gleichung (3.) geht über in

$$(3^a.)\quad \mu\,\mathfrak{P} + \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z} = 0.$$

Wir haben also statt der drei Componentengleichungen eine einzige Vectorgleichung erhalten. Ihr Sinn ist einfach der, dass in jedem beliebigen Punkte des betrachteten Körpers für einen in ihm gedachten Einheitswürfel mit den Kanten $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ die geometrische Summe sämmtlicher auf diesen wirkenden Kräfte gleich Null sein muss.

Aus den Gleichungen (3.) erkennen wir auch, dass der Werth der Summe der drei partiellen Differentialquotienten unabhängig ist von der Wahl des Coordinatensystems. Da $\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z}$ im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, kann auch die Summe dieser drei Vectoren im allgemeinen nicht Null werden.

Wir haben nun weiter für die Spannung in Bezug auf eine beliebig geneigte Ebene, deren Normale $\mathfrak{n}$ ist, die drei Componentengleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{cases}$$

Die Spannung für die Richtung $\mathfrak{n}$ ist daher

$$(5.)\quad X_n\mathfrak{i} + Y_n\mathfrak{j} + Z_n\mathfrak{k} = \mathfrak{P}_n.$$

Führen wir die Werthe von (4.) in (5.) ein, indem wir gleich entsprechend ordnen, so erhalten wir

$$(5^a.)\quad \begin{aligned} &(X_x\mathfrak{i} + Y_x\mathfrak{j} + Z_x\mathfrak{k})\cos(nx) + (X_y\mathfrak{i} + Y_y\mathfrak{j} + Z_y\mathfrak{k})\cos(ny) \\ &\qquad + (X_z\mathfrak{i} + Y_z\mathfrak{j} + Z_z\mathfrak{k})\cos(nz) = \mathfrak{P}_n. \end{aligned}$$

Nach (2.) können wir dies aber auch schreiben

$$(6.) \qquad \mathfrak{P}_x \cos(nx) + \mathfrak{P}_y \cos(ny) + \mathfrak{P}_z \cos(nz) = \mathfrak{P}_n;$$

auch hier haben wir wieder an Stelle der drei Componentengleichungen (4.) eine einzige Vectorgleichung erhalten, und wir erkennen, dass das die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids, nämlich des Spannungsellipsoids ist, dessen conjugirte Durchmesser $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$ und $\mathfrak{P}_z$ sind. Seine Halbachsen sind gleich den Hauptspannungen.

Die Richtung einer Hauptspannung fällt aber mit derjenigen der zugehörigen Normale zusammen. Bezeichnen wir die Hauptspannungen mit $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ und wählen ihre Richtungen zu Coordinatenachsen, dann ist also

$$\mathfrak{P}_1 = P_1 \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{P}_2 = P_2 \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{P}_3 = P_3 \mathfrak{k},$$

Gleichung (3.) lautet

$$(3^b.) \qquad \mu \dot{\mathfrak{v}} = \mu \mathfrak{P} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \mathfrak{i} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \mathfrak{j} + \frac{\partial P_3}{\partial z} \mathfrak{k}$$

und Gleichung (6.) geht über in

$$(7.) \qquad P_1 \cos(nx)\mathfrak{i} + P_2 \cos(ny)\mathfrak{j} + P_3 \cos(nz)\mathfrak{k} = \mathfrak{P}_n.$$

Wenn wir Gleichung (7.) quadriren, so erhalten wir

$$(8.) \qquad \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{P}_n{}^{*}) = P_n^2 = P_1^2 \cos^2(nx) + P_2^2 \cos^2(ny) + P_3^2 \cos^2(nz).$$

Dies ist die bekannte skalare Beziehung zwischen einer beliebigen Spannung und den Hauptspannungen in einem bestimmten Punkte.

Ebenso erhalten wir aus (6.)

$$(9.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{P}_n = P_n^2 = P_x^2 \cos^2(nx) + P_y^2 \cos^2(ny) + P_z^2 \cos^2(nz) \\ \qquad + 2\mathfrak{P}_x \cdot \mathfrak{P}_y \cos(nx)\cos(ny) + 2\mathfrak{P}_y \cdot \mathfrak{P}_z \cos(ny)\cos(nz) \\ \qquad\qquad + 2\mathfrak{P}_z \cdot \mathfrak{P}_x \cos(nz)\cos(nx). \end{cases}$$

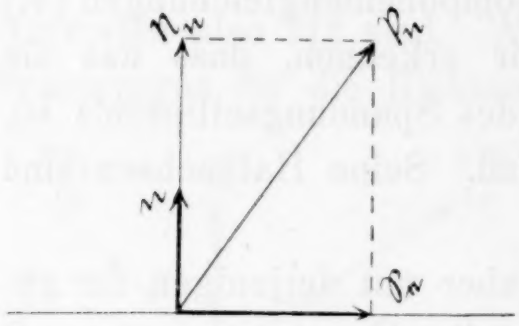
Führen wir in diese Gleichung die Componenten von $\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z$ ein, so kommen wir wieder zu einer bekannten skalaren Beziehung, denn es ist nach (2.)

$$(10.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_x \cdot \mathfrak{P}_x = P_x^2 = X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2, & \mathfrak{P}_x \cdot \mathfrak{P}_y = X_x X_y + Y_x Y_y + Z_x Z_y, \\ \mathfrak{P}_y \cdot \mathfrak{P}_y = P_y^2 = X_y^2 + Y_y^2 + Z_y^2, & \mathfrak{P}_y \cdot \mathfrak{P}_z = X_y X_z + Y_y Y_z + Z_y Z_z, \\ \mathfrak{P}_z \cdot \mathfrak{P}_z = P_z^2 = X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2, & \mathfrak{P}_z \cdot \mathfrak{P}_z = X_z X_x + Y_z Y_x + Z_z Z_x. \end{cases}$$

---

*) Wir bezeichnen hier nach ***Gibbs*** ein inneres Product durch einen Punkt. Die Ergänzung eines äusseren, das wir auch kurz als äusseres Product bezeichnen wollen, durch ein Kreuz $\times$.

Wir können nun jede Spannung $\mathfrak{P}_n$ in zwei Componenten zerlegen; in eine Componente $\mathfrak{N}_n$ in der Richtung $\mathfrak{n}$ und eine dazu senkrechte $\mathfrak{S}_n$. $\mathfrak{N}_n$ ist dann eine Zug- oder Druckspannung, je nachdem sie die gleiche oder entgegengesetzte Richtung mit der Normalen $\mathfrak{n}$ hat. $\mathfrak{S}_n$ ist eine Schubspannung.



Um den skalaren Werth von $\mathfrak{N}_n$ zu finden, brauchen wir bloss das innere Product von $\mathfrak{P}_n$ mit dem Einheitsvector $\mathfrak{n}$ zu bilden. Es ist

$$\mathfrak{N}_n = \pm N_n \mathfrak{n},$$

$$N_n = \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{n} = P_n \cos(\mathfrak{P}_n \mathfrak{n}). \tag{11.}$$

Da nun

$$\mathfrak{n} = \cos(nx)\,\mathfrak{i} + \cos(ny)\,\mathfrak{j} + \cos(nz)\,\mathfrak{k},$$

so folgt aus (7.) die bekannte Beziehung

$$N_n = \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{n} = P_1 \cos^2(nx) + P_2 \cos^2(ny) + P_3 \cos^2(nz). \tag{12.}$$

Ebenso hätten wir durch innere Multiplication von (6.) oder (5ª.) mit $\mathfrak{n}$ den Ausdruck von N_n für beliebige rechtwinklige Coordinaten gefunden.

Der skalare Werth von $\mathfrak{S}_n$ ist nun gleich dem skalaren Werth des äusseren Productes von $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{n}$. Es ist

$$\mathfrak{S}_n = S_n(\mathfrak{n} \times \mathfrak{c}),$$

$$\mathfrak{P}_n \times \mathfrak{n} = P_n \sin(\mathfrak{P}_n \mathfrak{n})\,\mathfrak{c} = S_n \mathfrak{c}, \tag{13.}$$

$$(\mathfrak{P}_n \times \mathfrak{n}) \cdot (\mathfrak{P}_n \times \mathfrak{n}) = S_n^2, \tag{14.}$$

wobei $\mathfrak{c}$ einen Einheitsvector senkrecht zur Ebene $\mathfrak{P}_n, \mathfrak{n}$ darstellt.

Wir bilden nun mit Hülfe von (7.) das äussere Product und erhalten

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P}_n \times \mathfrak{n} = {} & (P_2 - P_3)\cos(ny)\cos(nz)\,\mathfrak{i} + (P_3 - P_1)\cos(nz)\cos(nx)\,\mathfrak{j} \\ & + (P_1 - P_2)\cos(nx)\cos(ny)\,\mathfrak{k} \end{aligned}\right. \tag{15.}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} S_n^2 = (\mathfrak{P}_n \times \mathfrak{n}) \cdot (\mathfrak{P}_n \times \mathfrak{n}) = {} & (P_2 - P_3)^2 \cos^2(ny)\cos^2(nz) \\ & + (P_3 - P_1)^2 \cos^2(nz)\cos^2(nx) + (P_1 - P_2)^2 \cos^2(nx)\cos^2(ny). \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

Ebenso erhalten wir einen entsprechenden skalaren Ausdruck für S_n, wenn wir Gleichung (5ª.) verwenden.

Für $\mathfrak{P}_x$ u. s. w. finden wir nach (2.)

$$\mathfrak{N}_n = X_x \mathfrak{i},$$
$$\mathfrak{S}_n = Y_x \mathfrak{j} + Z_x \mathfrak{k}.$$

Für jede Hauptspannungsrichtung wird $\mathfrak{P}_n$ parallel zu $\mathfrak{n}$ und daher $\mathfrak{P}_n \times \mathfrak{n} = 0$. Es wird nun in dem betrachteten Körper ein dreifaches System von orthogonalen Flächen geben, für das die Schnittlinien nach dem Satz von ***Dupin*** Krümmungscurven sind. Die Hauptspannungen bilden in jedem Punkte Tangenten an diese Curven, und es bestehen ferner die drei Gleichungen:

$$(17.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{n}_1 = 0, \\ \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{n}_2 = 0, \\ \mathfrak{P}_3 \times \mathfrak{n}_3 = 0, \end{cases}$$

wobei $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ die entsprechenden Normalen der Flächen bedeuten.

Noch einfacher gestalten sich die Gleichungen für elastische Körper, wenn wir die von *Gibbs**) eingeführten „dyadics“ benutzen. Setzen wir nach *Gibbs*

$$(18.)^{**}) \qquad \Phi = \mathfrak{P}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{P}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{P}_z \mathfrak{k},$$

dann ist in sinngemässer Verallgemeinerung des Operationszeichens div $= \nabla$.

$$(19.) \qquad \operatorname{div} \Phi = \nabla \cdot \Phi = \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z};$$

führen wir diese Bezeichnung in die Gleichungen (3.) und (3ª.) ein, so erhalten wir

$$(20.) \qquad \mu \dot{\mathfrak{v}} = \mu \mathfrak{P} + \nabla \cdot \Phi,$$
$$(20^a.) \qquad \mu \mathfrak{P} + \nabla \cdot \Phi = 0.$$

Für $\nabla \cdot \Phi = 0$ geht Gleichung (20.) über in die Bewegungsgleichung für starre Körper.

Für Flüssigkeiten hat die Druckspannung in jedem Punkte nach allen Richtungen denselben skalaren Werth. Nennen wir ihn p, so können wir setzen:

$$\mathfrak{P}_x = p \mathfrak{i}, \qquad \mathfrak{P}_y = p \mathfrak{j}, \qquad \mathfrak{P}_z = p \mathfrak{k}.$$

---

*) *Gibbs-Wilson*, Vector Analysis. New-York und London 1901.

**) In einer später folgenden Arbeit möchte ich den Vorschlag machen, ein Feld, das durch den Ausdruck (18.) gegeben ist, als Feld zweiten Grades zu bezeichnen. In unserem Fall ist jeder Punkt des Feldes definirt durch ein bestimmtes Ellipsoid. Das Feld zweiten Grades erscheint hier als Verallgemeinerung des Feldes ersten Grades oder des Vectorfeldes.

Es wird daher

$$(21.) \qquad \nabla \cdot \Phi = \frac{\partial p}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathfrak{k} = \nabla p,$$

und die Gleichung (20.) geht über in die Bewegungsgleichung für Flüssigkeiten

$$(22.) \qquad \mu \dot{\mathfrak{v}} = \mu \mathfrak{P} + \nabla p.$$

Eine weitere Specialisirung der Gleichung (20.) tritt noch ein, wenn die äusseren Massenkräfte sich von einem Potential V ableiten lassen, so dass $\mathfrak{P} = \nabla V$ wird.

Es ist nun ferner, da $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n} = \cos(nx) \ldots$,

$$(\mathfrak{P}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{P}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{P}_z \mathfrak{k}) \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{P}_x \cos(nx) + \mathfrak{P}_y \cos(ny) + \mathfrak{P}_z \cos(nz).$$

Wir erhalten daher mit Benutzung von (6.) und (18.) für eine Spannung der beliebigen Richtung $\mathfrak{n}$ den einfachen Ausdruck

$$(23.) \qquad \mathfrak{P}_n = \Phi \cdot \mathfrak{n}.$$

Für die drei Hauptspannungen in einem bestimmten Punkte geht Φ über in

$$(24.) \qquad \Phi = P_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + P_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + P_3 \mathfrak{k}\mathfrak{k},$$

und es ist wieder

$$(P_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + P_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + P_3 \mathfrak{k}\mathfrak{k}) \cdot \mathfrak{n} = P_1 \cos(nx)\mathfrak{i} + P_2 \cos(ny)\mathfrak{j} + P_3 \cos(nz)\mathfrak{k}.$$

Für Flüssigkeiten wird

$$(25.) \qquad \Phi = p(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}).$$

Der Ausdruck $\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$ spielt bei „dyadics“ die Rolle der Einheit und wird von *Gibbs* als „idemfactor“ bezeichnet. Setzen wir

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k} = I,$$

dann ist für Flüssigkeiten

$$(25^a.) \qquad \Phi = pI.$$

Für den skalaren Werth der Zugspannung in einem bestimmten Punkte in der Richtung $\mathfrak{n}$ erhalten wir nach (11.) und (23.)

$$(26.) \qquad N_n = \mathfrak{n} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{n}$$

und für den skalaren Werth der Schubspannung nach (14.) und (23.)

$$(27.) \qquad S_n^2 = (\mathfrak{n} \times \Phi \cdot \mathfrak{n})^2.$$

Für den Skalar und den Vector von Φ können wir nach der Bezeichnungsweise von *Gibbs* schreiben

(28.) $$\Phi_S = \mathfrak{P}_x \cdot \mathfrak{i} + \mathfrak{P}_y \cdot \mathfrak{j} + \mathfrak{P}_z \cdot \mathfrak{k},$$

(29.) $$\Phi_\times = \mathfrak{P}_x \times \mathfrak{i} + \mathfrak{P}_y \times \mathfrak{j} + \mathfrak{P}_z \times \mathfrak{k}.$$

Es ist nun

$$\mathfrak{P}_x \cdot \mathfrak{i} = (X_x \mathfrak{i} + Y_x \mathfrak{j} + Z_x \mathfrak{k}) \cdot \mathfrak{i} = X_x,$$

$$\mathfrak{P}_x \times \mathfrak{i} = (X_x \mathfrak{i} + Y_x \mathfrak{j} + Z_x \mathfrak{k}) \times \mathfrak{i} = Z_x \mathfrak{j} - Y_x \mathfrak{k};$$

daher ist

(30.) $$\Phi_S = X_x + Y_y + Z_z,$$

(31.) $$\Phi_\times = (Y_z - Z_y)\mathfrak{i} + (Z_x - X_z)\mathfrak{j} + (X_y - Y_x)\mathfrak{k}.$$

$\Phi_\times$ ist ein achsialer Vector und stellt das Drehmoment pro Volumeinheit, also pro Einheitswürfel, der Spannungscomponenten, bezogen auf ein gewähltes Achsensystem $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ in einem Punkte des Körpers dar.

Wenn dieses Drehmoment für jeden Punkt und jedes Achsensystem Null sein soll, so kommen wir zu der bekannten Beziehung

$$Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z, \qquad X_y = Y_x,$$

die jetzt nach (31.) einfach lautet

(31ª.) $$\Phi_\times = 0.$$

Es sei noch erwähnt, dass wir (18.) auch schreiben können:

$$\Phi = \mathfrak{i}\mathfrak{Q}_x + \mathfrak{j}\mathfrak{Q}_y + \mathfrak{k}\mathfrak{Q}_z,$$

wobei

$$\mathfrak{Q}_x = X_x \mathfrak{i} + X_y \mathfrak{j} + X_z \mathfrak{k}$$

u. s. w.

Nach (31ª.) wird aber

$$\mathfrak{Q}_x = \mathfrak{P}_x$$

u. s. w.

Φ ist daher selbstconjugirt.

Ich glaube nun gezeigt zu haben, dass mit der Einführung von Vectoren und speciell von ***dyadics*** sich die Darstellung und Entwicklung der Gleichungen für elastische Körper einfacher und übersichtlicher gestaltet. Für ihre quantitative Auswerthung muss man natürlich in den meisten Fällen auf die Zerlegung nach drei Componenten zurückgehen; doch dies ist eine rein mechanische Thätigkeit. Diese Componentengleichungen sind aber nicht mehr so übersichtlich und lassen das eigentliche Wesen einer Beziehung nicht erkennen, weshalb in qualitativer Hinsicht die Vectorgleichung zuerst kommt. Dieser Einsicht werden sich wohl auch die Gegner der Vectorrechnung auf die Dauer nicht verschliessen können.

Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques.

(Par M. *Georges Voronoï* à Varsovie).

Introduction.

Je m'occupe dans ce mémoire des méthodes qui servent à déterminer la valeur asymptotique de la fonction numérique $F(x)$ représentée par la somme

$$F(x) = \sum_{(s)} f(m, n), \tag{1.}$$

la fonction arbitraire $f(m, n)$ des variables entières m et n étant bien déterminée dans l'ensemble (S) défini par les inégalités

$$(S) \ldots m > 0,\ n > 0 \text{ et } mn \leqq x \text{ où } x \geqq 1.$$

Le cas le plus simple où

$$f(m, n) = 1$$

a été l'objet de plusieurs recherches.*) Dans ce cas, la fonction $F(x)$ représentée par la somme (1.) peut être mise sous la forme

$$F(x) = \sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n},$$

si l'on désigne par le symbole Ex le nombre entier satisfaisant aux conditions

$$x - 1 < Ex \leqq x.$$

Lejeune-Dirichlet a démontré**) que la fonction numérique $\sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n}$ a une valeur asymptotique remarquable:

$$x(\log x + 2C - 1),$$

C étant la constante d'*Euler;* de plus, si l'on pose

$$\sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n} = x(\log x + 2C - 1) + R(x),$$

*) Voyez: Zahlentheorie von *Paul Bachmann* (Zweiter Theil: Die analytische Zahlentheorie, Abschnitt 13. Leipzig, 1894).

**) *Lejeune-Dirichlet*: „Ueber die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie“ et „Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie“ (*Lejeune-Dirichlets* Werke, t. I, p. 351 et t. II, p. 49).

le reste $R(x)$ vérifiera l'inégalité

$$|R(x)| < A\sqrt{x},$$

quelle que soit la valeur positive de x, A étant une constante fixe.

La méthode qui avait servi à l'illustre géomètre dans ses recherches concernant la fonction $\sum_{n>0}^{n\leq x} E\frac{x}{n}$ était fondée sur une transformation remarquable de la somme qui représente cette fonction.

D'après *Lejeune-Dirichlet,* on a la formule

$$\sum_{n>0}^{n\leq x} E\frac{x}{n} = \sum_{m>0}^{m\leq \mu} E\frac{x}{m} + \sum_{n>0}^{n\leq x} E\frac{x}{n} - E\mu \cdot E\nu,$$

les paramètres positifs μ et ν étant liés par la relation

$$\mu\nu = x.$$

En faisant

$$\mu = \nu = \sqrt{x},$$

on obtient la formule

$$\sum_{n>0}^{n\leq x} E\frac{x}{n} = 2\sum_{n>0}^{n\geq \sqrt{x}} E\frac{x}{n} - (E\sqrt{x})^2,$$

qui est fondamentale dans les recherches de *Lejeune-Dirichlet.*

Peu de temps avant sa mort, l'illustre géomètre a fait une nouvelle découverte concernant la fonction $\sum_{n>0}^{n\leq x} E\frac{x}{n}$, comme on peut en conclure d'après la lettre de *Lejeune-Dirichlet* à *Kronecker* datée du 23. juillet 1858:

„Seit unserem neulichen Gespräch auf der Fahrt von Ilsenburg nach Harzburg ist es mir gelungen, die Summe $\sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{n}{s}\right]$, wo [ ] nach *Gauss* das grösste Ganze bezeichnet, und die ich bisher nur mit einem Fehler der Ordnung $\sqrt{n}$ angeben konnte, bedeutend in die Enge zu treiben. Die Auffindung des hierzu dienenden Mittels, welches aller Wahrscheinlichkeit nach auch auf die folgenden Fälle anwendbar sein wird, macht mir zwar grosses Vergnügen, kommt mir aber insofern zu ungelegener Zeit, als ich dadurch von der Vollendung der hydrodynamischen Abhandlung abgezogen werde, welche doch endlich fertig werden muss.“ *)

Les nouveaux résultats concernant la fonction $\sum_{n>0}^{n\leq x} E\frac{x}{n}$, obtenus par *Lejeune-Dirichlet,* n'ont pas été publiés, et jusqu'à présent on n'en sait pas

*) *Lejeune-Dirichlets* Werke, t. II, p. 407.

plus qu'après la publication en 1849 du célèbre mémoire de *Lejeune-Dirichlet*: „Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie".

Le but de ce mémoire est de démontrer un théorème nouveau concernant la fonction $\sum_{n>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}$, à savoir:

Théorème. La fonction $x(\log x+2C-1)$ *représente la fonction numérique* $\sum_{n>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}$ *avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction* $\sqrt[3]{x}\log x$.

On parvient au résultat énoncé à l'aide d'une transformation nouvelle de la somme $\sum_{n>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}$. Cette même transformation peut être appliquée à toute somme $\sum_{(s)} f(m,n)$, considérée plus haut, et constitue une méthode nouvelle qui peut servir à la recherche de la valeur asymptotique de la fonction numérique $F(x)$ représentée par la somme double (1.).

Il est aisé de généraliser la méthode exposée dans ce mémoire et de l'appliquer aux recherches des valeurs asymptotiques de différentes sommes multiples.

Première partie.

Transformation fondamentale de la somme $\sum_{(s)} f(m,n)$, $\quad (S\ldots m>0,\ n>0 \text{ et } mn\leqq x)$.

Interprétation géométrique de la transformation de *Dirichlet*.

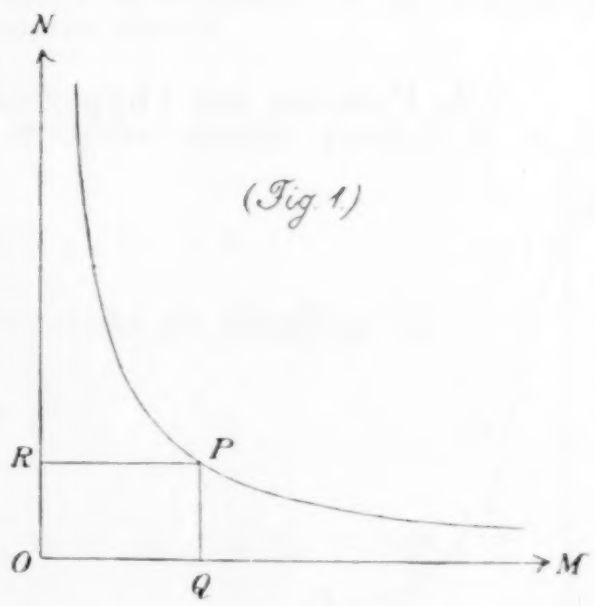
1. Désignons par (S) l'ensemble des points ayant les coordonnées entières m et n et vérifiant les inégalités

$$(S)\ldots m>0,\ n>0 \text{ et } mn\leqq x.$$

Prenons sur l'hyperbole équilatère définie par l'équation

$$mn = x$$

un point quelconque P ayant les coordonnées positives μ et ν (Fig. 1). Menons du point P deux parallèles PR et PQ aux axes des coordonnées OM et ON; on formera de cette manière un rectangle $OQPR$ et deux quadrilatères curvilignes $OQPN$ et $ORPM$ ayant les points M et N à l'infini.



(Fig. 1)

Désignons par (S_0) l'ensemble des points du rectangle $OQPR$ appartenant à l'ensemble (S); par (S_1) et (S_2) désignons les ensembles des points

des quadrilatères curvilignes $OQPN$ et $ORPM$ appartenant à l'ensemble (S). On définira ces trois ensembles par les inégalités suivantes:

$$(S_0) \ldots 0<m\leqq\mu \text{ et } 0<n\leqq\nu,$$

$$(S_1) \ldots 0<m\leqq\mu \text{ et } 0<n\leqq\frac{x}{m},$$

$$(S_2) \ldots 0<m\leqq\frac{x}{n} \text{ et } 0<n\leqq\nu.$$

Il en résulte que, la fonction $f(m,n)$ étant bien déterminée dans l'ensemble (S), on aura l'identité

$$(1.) \qquad \sum_{(s)} f(m,n)=\sum_{(s_1)} f(m,n)+\sum_{(s_2)} f(m,n)-\sum_{(s_0)} f(m,n).$$

En faisant

$$f(m,n)=1,$$

on obtient

$$\sum_{(s)} f(m,n)=\sum_{n>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}, \qquad \sum_{(s_0)} f(m,n)=E\mu\cdot E\nu,$$

$$\sum_{(s_1)} f(m,n)=\sum_{m>0}^{m\leqq\mu} E\frac{x}{m}, \qquad \sum_{(s_2)} f(m,n)=\sum_{n>0}^{n\leqq\nu} E\frac{x}{n},$$

et l'identité (1.) se ramène à la formule de *Lejeune-Dirichlet*

$$\sum_{n>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}=\sum_{m>0}^{m\leqq\mu} E\frac{x}{m}+\sum_{n>0}^{n\leqq\nu} E\frac{x}{n}-E\mu\cdot E\nu.$$

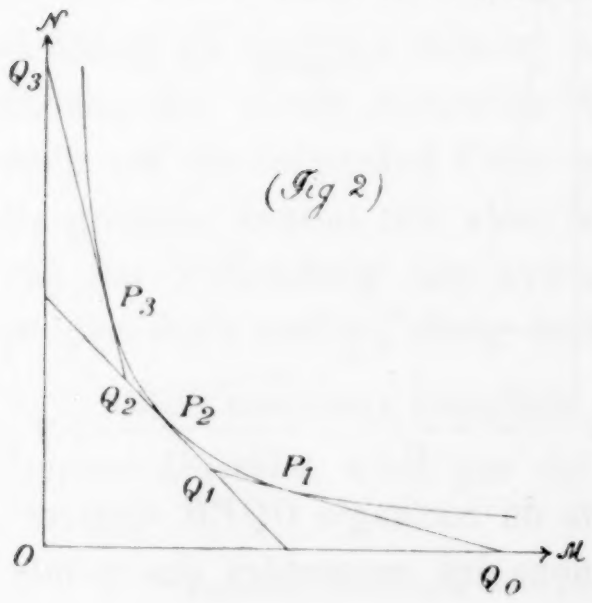
La formule obtenue subsiste à condition que les paramètres positifs μ et ν soient liés par la relation

$$\mu\nu=x.$$

Nouvelle transformation de la somme $\sum_{(s)} f(m,n)$.

2. Prenons sur l'hyperbole équilatère définie par l'équation

$$mn=x$$



(Fig 2)

k points $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (Fig. 2) dont les coordonnées μ_i et ν_i $(i=1,2,\ldots,k)$ satisfont aux conditions

$$\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_k>0$$

et

$$0<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k.$$

Menons les tangentes à l'hyperbole aux points choisis et aux points P_0 et P_{k+1} pris à l'infini.

Désignons les points où les tangentes contiguës se coupent par $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$. On formera $k+1$ triangles curvilignes $P_i\, Q_i\, P_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ et un polygone $O\, Q_0\, Q_1 \ldots Q_k$.

Désignons par (S_i) l'ensemble des points du triangle curviligne $P_i\, Q_i\, P_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ appartenant à l'ensemble (S), les points des tangentes $P_i\, Q_i$ et $Q_i\, P_{i+1}$ étant exclus; par (Σ) désignons l'ensemble des points du polygone $O\, Q_0\, Q_1 \ldots Q_k$ appartenant à l'ensemble (S).

L'ensemble (S) est partagé de cette manière en $k+2$ ensembles distincts: $(S_0), (S_1), \ldots, (S_k)$ et (Σ); il en résulte l'identité évidente

$$\sum_{(s)} f(m, n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(s_i)} f(m, n) + \sum_{(\sigma)} f(m, n).$$

On définira les ensembles $(S_0), (S_1), \ldots, (S_k)$ à l'aide des inégalités

$$(S_i) \ldots \begin{cases} 2x < m\nu_i + n\mu_i \leqq \mu_{i+1}\nu_i + \nu_{i+1}\mu_i, \\ 2x < m\nu_{i+1} + n\mu_{i+1} \leqq \mu_i\nu_{i+1} + \nu_i\mu_{i+1}, \quad mn \leqq x, \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

ayant égard aux équations des tangentes menées et à l'équation de l'hyperbole.

Quant à l'ensemble (Σ), on le définira en partageant le polygone $O\, Q_0\, Q_1 \ldots Q_k$ en k triangles (Fig. 2) formés de $k+2$ tangentes menées à l'hyperbole.

La construction de ces triangles et leur définition analytique dépendent du choix des points $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sur l'hyperbole.

Algorithme pour le choix des points $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sur l'hyperbole.

3. *Lemme. Soit t un paramètre arbitraire satisfaisant à la condition*

$$t \geqq 1.$$

Supposons que tous les systèmes des nombres entiers positifs a et b vérifiant l'inégalité

$$a\, b \leqq t$$

et n'ayant pas de diviseur commun forment une suite de fractions où

$$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \cdots > \frac{a_k}{b_k}.$$

En désignant

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0 \qquad et \qquad a_{k+1} = 0,\ b_{k+1} = 1,$$

on aura les équations

$$(1.) \qquad a_i\, b_{i+1} - a_{i+1}\, b = 1$$

où $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Prenons quatre nombres positifs ou nuls

$$\alpha', \beta' \qquad \text{et} \qquad \alpha'', \beta''$$

liés par la relation

$$\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta' = 1.$$

Il en résulte que

$$\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha''}{\beta''}.$$

En posant

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' \qquad \text{et} \qquad \beta = \beta' + \beta'', \tag{2.}$$

on formera une suite de fractions où

$$\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha''}{\beta''}$$

et

$$\alpha' \beta - \alpha \beta' = 1, \qquad \alpha \beta'' - \alpha'' \beta = 1.$$

On peut, à l'aide du même procédé, intercaler entre les fractions

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \text{ et } \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } \frac{\alpha''}{\beta''}$$

de nouvelles fractions, etc.

Supposons qu'on ait intercalé à l'aide du procédé exposé s fractions entre les fractions $\frac{\alpha'}{\beta'}$ et $\frac{\alpha''}{\beta''}$; on obtiendra une suite de fractions où

$$\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \cdots > \frac{\alpha_s}{\beta_s} > \frac{\alpha''}{\beta''}. \tag{3.}$$

En désignant

$$\alpha' = \alpha_0, \ \beta' = \beta_0 \qquad \text{et} \qquad \alpha'' = \alpha_{s+1}, \ \beta'' = \beta_{s+1},$$

on aura les équations

$$\alpha_i \beta_{i+1} - \alpha_{i+1} \beta_i = 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, s). \tag{4.}$$

Dans le cas où

$$\alpha' \beta' \leqq t, \ \alpha'' \beta'' \leqq t \qquad \text{et} \qquad (\alpha' + \alpha'')(\beta' + \beta'') \leqq t,$$

on peut former la série (3.) de manière que les inégalités

$$\alpha_i \beta_i \leqq t, \quad (i = 0, 1, \ldots, s+1) \quad \text{et} \quad (\alpha_i + \alpha_{i+1})(\beta_i + \beta_{i+1}) > t \quad (i = 0, 1, \ldots, s) \tag{5.}$$

aient lieu.

Cela posé, attribuons aux nombres α', β' et α'', β'' les valeurs

$$\alpha' = 1, \ \beta' = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha'' = 0, \ \beta'' = 1.$$

La suite de ***Farey****) des fractions (3.) est dans ce cas la même que la suite

$$\frac{a_0}{b_0} > \frac{a_1}{b_1} > \cdots > \frac{a_k}{b_k} > \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}. \tag{6.}$$

Pour le démontrer, considérons une fraction quelconque $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ appartenant à la série (3.), $i = 1, 2, \ldots, s$. Par hypothèse, le produit $\alpha_i \beta_i$ satisfait à la condition

$$\alpha_i \beta_i \leqq t,$$

et, en vertu des équations (4.), les nombres entiers positifs α_i et β_i n'ont pas de diviseur commun. Il en résulte que la fraction $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ appartient à la série (6.).

Admettons maintenant qu'il existe une fraction $\frac{a}{b}$ parmi celles de la série (6.) qui n'appartient pas à la série (3.). On trouvera dans la série (3.) deux fractions contiguës $\frac{\alpha_r}{\beta_r}$ et $\frac{\alpha_{r+1}}{\beta_{r+1}}$ satisfaisant aux conditions

$$\frac{\alpha_r}{\beta_r} > \frac{a}{b} > \frac{\alpha_{r+1}}{\beta_{r+1}};$$

il s'ensuit

$$\alpha_r b - \beta_r a > 0 \qquad \text{et} \qquad a\beta_{r+1} - b\alpha_{r+1} > 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha_r b - \beta_r a \geqq 1 \qquad \text{et} \qquad a\beta_{r+1} - b\alpha_{r+1} \geqq 1.$$

En additionnant ces inégalités après les avoir multipliées par les nombres α_{r+1} et α_r, on obtient

$$a(\alpha_r \beta_{r+1} - \alpha_{r+1}\beta_r) \geqq \alpha_r + \alpha_{r+1},$$

et, à cause de (4.), il vient

$$a \geqq \alpha_r + \alpha_{r+1}.$$

De la même manière, on trouvera aussi

$$b \geqq \beta_r + \beta_{r+1},$$

et il en résulte

$$ab \geqq (\alpha_r + \alpha_{r+1})(\beta_r + \beta_{r+1}).$$

---

*) On trouvera des notices historiques sur les séries de ***Farey*** dans le mémoire de ***M. Hurwitz***: „Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche“ (Mathematische Annalen, t. 44, p. 417). Voyez aussi: ***J. Hermes*** „Anzahl der Zerlegung einer rationalen Zahl in Summanden“ (Mathem. Annalen, t. 45, p. 371) et ***K. Vahlen*** „Ueber Näherungswerthe und Kettenbrüche“ (Dieses Journal, t. 115, p. 221).

En vertu de (5.), on aura l'inégalité

$$ab > t,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Il est donc démontré que les deux séries (3.) et (6.) coïncident. Les équations (4.) peuvent dans ce cas s'écrire

$$a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

Corollaire. En intercalant entre les nombres $\frac{1}{0}$ *et* $\frac{0}{1}$ *à l'aide du procédé* (2.) *toutes les fractions* $\frac{\alpha}{\beta}$ *satisfaisant à la condition*

(7.) $$\alpha\beta \leqq t,$$

on obtient tous les systèmes des nombres entiers a et b n'ayant pas de diviseur commun et vérifiant l'inégalité

$$ab \leqq t.$$

4. Examinons en détail un cas où, par exemple,

$$t = 6.$$

On choisira les produits de deux facteurs n'ayant pas de diviseur commun

$$1\cdot1,\ 1\cdot2,\ 1\cdot3,\ 1\cdot4,\ 1\cdot5,\ 1\cdot6,\ 2\cdot1,\ 2\cdot3,\ 3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 4\cdot1,\ 5\cdot1,\ 6\cdot1$$

qui ne surpassent pas 6 et on formera les fractions

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{5}{1},\ \frac{6}{1}.$$

En disposant ces fractions, d'après leur grandeur, on obtient la suite de fractions cherchée

$$\frac{6}{1},\ \frac{5}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}.$$

Formons cette même série d'une autre manière. On intercalera entre les nombres $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{1}$ la fraction $\frac{1}{1}$; entre les fractions $\frac{1}{0}$ et $\frac{1}{1}$, on intercalera la fraction $\frac{2}{1}$ et entre les fractions $\frac{1}{1}$ et $\frac{0}{1}$ la fraction $\frac{1}{2}$, on formera de cette manière la série de *Farey*

$$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{0}{1}.$$

En intercalant les fractions correspondantes entre les fractions contiguës de cette série, on formera la série de *Farey*

$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{0}{1}.$$

On ne peut plus intercaler de fractions entre les fractions contiguës de la série

$$\frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},$$

puisque chaque fraction intercalée ne satisfera pas à la condition (7.).

Il reste donc à intercaler des fractions entre les fractions contiguës

$$\frac{1}{0}, \frac{3}{1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}, \frac{0}{1}.$$

On formera les séries

$$\frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{5}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0}{1}.$$

En réunissant les résultats obtenus, on aura la série de *Farey* cherchée

$$\frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{5}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0}{1}.$$

5. *Algorithme. On choisira les points $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sur l'hyperbole définie par l'équation*

$$mn = x$$

en désignant par

$$(8.) \qquad \mu_i = \sqrt{\frac{a_i}{b_i} x} \qquad et \qquad \nu_i = \sqrt{\frac{b_i}{a_i} x} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

les coordonnées μ_i et ν_i du point P_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Comme les points P_0 et P_{k+1}, d'après la supposition faite au n° 2, sont les points à l'infini de l'hyperbole, on a

$$\mu_0 = \infty, \ \nu_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu_{k+1} = 0, \ \nu_{k+1} = \infty.$$

Il en résulte que les coordonnées de ces points peuvent aussi être déterminées à l'aide des formules (8.), puisqu'on a posé au n° 3

$$a_0 = 1, \ b_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{k+1} = 0, \ b_{k+1} = 1.$$

Transformation de la somme $\sum_{(a)} f(m, n)$.

6. En vertu de l'algorithme établi au n° 5, chaque fraction $\frac{a_i}{b_i}$ de la série de *Farey*

$$(1.) \qquad \frac{1}{0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}, \frac{0}{1}$$

définit un point P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, k+1)$ sur l'hyperbole et, par suite, une tangente à l'hyperbole, menée au point P_i.

Rappelons-nous que l'on a formé la série de ***Farey*** (1.) à l'aide d'intercalations successives. Supposons que l'on ait effectué ces intercalations dans l'ordre qui suit:

1) entre les fractions $\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$ et $\frac{\alpha_1''}{\beta_1''}$ on a intercalé $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$,

2) entre les fractions $\frac{\alpha_2'}{\beta_2'}$ et $\frac{\alpha_2''}{\beta_2''}$ on a intercalé $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$,

. . . . . .

k) entre les fractions $\frac{\alpha_k'}{\beta_k'}$ et $\frac{\alpha_k''}{\beta_k''}$ on a intercalé $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$.

La série des fractions

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_k}{\beta_k}$$

ne diffère de la série des fractions

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}$$

que par l'ordre des termes.

Chaque paire des fractions $\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}$ et $\frac{\alpha_i''}{\beta_i''}$ aussi que la fraction intercalée $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ appartiennent à la série de ***Farey*** (1.); donc ces trois fractions déterminent trois tangentes à l'hyperbole. Désignons, pour un moment, le triangle formé de ces trois tangentes par le symbole

$$\left[\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}, \frac{\alpha_i''}{\beta_i''}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

L'ensemble de k triangles

$$\left[\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}, \frac{\alpha_1''}{\beta_1''}\right], \left[\frac{\alpha_2'}{\beta_2'}, \frac{\alpha_2''}{\beta_2''}\right], \ldots, \left[\frac{\alpha_k'}{\beta_k'}, \frac{\alpha_k''}{\beta_k''}\right]$$

formera le polygone $O\,Q_0\,Q_1 \ldots Q_k$ que nous avons considéré au n° 2. Pour le démontrer, il suffit d'examiner les différents polygones qui correspondent aux différentes valeurs du paramètre t.

Quand t varie entre les limites

$$1 \leqq t < 2,$$

la série correspondante de ***Farey*** sera

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1},$$

et le polygone $O\,Q_0\,Q_1$ dans ce cas n'est autre chose que le triangle désigné par le symbole $\left[\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right]$.

En faisant varier t entre les limites

$$2 \leqq t < 3,$$

on obtient la série de *Farey*

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{1},$$

et le polygone $O\,Q_0\,Q_1\,Q_2\,Q_3$ est formé dans ce cas de trois triangles (Fig. 2)

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right], \left[\frac{1}{0}, \frac{1}{1}\right], \left[\frac{1}{1}, \frac{0}{1}\right].$$

Quand t varie entre les limites

$$3 \leqq t < 4,$$

on doit ajouter à ces trois triangles deux triangles

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{2}{1}\right] \text{ et } \left[\frac{1}{2}, \frac{0}{1}\right]$$

pour former le nouveau polygone $O\,Q_0\,Q_1 \ldots, Q_5$ etc.

7. Nous avons désigné au n° 2 par (Σ) l'ensemble des points du polygone $O\,Q_0\,Q_1 \ldots Q_k$ appartenant à l'ensemble (S). Désignons par (Σ_i) l'ensemble des points du triangle $\left[\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}, \frac{\alpha_i''}{\beta_i''}\right]$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ appartenant à l'ensemble (S), les points des tangentes correspondantes aux fractions $\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}$ et $\frac{\alpha_i''}{\beta_i''}$ étant exclus.

On partagera de cette manière l'ensemble (Σ) en k ensembles distincts $(\Sigma_1), (\Sigma_2), \ldots, (\Sigma_k)$ et, par suite, on aura l'identité

$$(2.) \qquad \sum_{(\sigma)} f(m, n) = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(\sigma_i)} f(m, n).$$

Ayant égard aux équations des tangentes à l'hyperbole qui forment le triangle $\left[\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}, \frac{\alpha_i''}{\beta_i''}\right]$, on définira l'ensemble (Σ_i) à l'aide des inégalités qui suivent:

$$(\Sigma_i) \ldots m\beta_i' + n\alpha_i' > 2\sqrt{\alpha_i'\,\beta_i'\,x},\ m\beta_i'' + n\alpha_i'' > 2\sqrt{\alpha_i''\,\beta_i''\,x} \text{ et } m\beta_i + n\alpha_i \leqq 2\sqrt{\alpha_i\,\beta_i\,x}.$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

Formule fondamentale pour la transformation de la somme $\Sigma f(m, n)$.

8. Nous avons présenté au n° 2 la somme $\sum_{(s)} f(m, n)$ sous la forme suivante:

$$\sum_{(s)} f(m, n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(s_i)} f(m, n) + \sum_{(\sigma)} f(m, n).$$

En vertu de l'égalité (2.) du n° 7, on aura la formule

$$\sum_{(s)} f(m, n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(s_i)} f(m, n) + \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(\sigma_i)} f(m, n).$$

Nous avons défini au n° 2 l'ensemble (S_i), $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ par les inégalités suivantes:

$$2x < m\nu_i + n\mu_i \leqq \mu_{i+1}\nu_i + \nu_{i+1}\mu_i, \quad 2x < m\nu_{i+1} + n\mu_{i+1} \leqq \mu_i\nu_{i+1} + \nu_i\mu_{i+1}, \quad mn \leqq x.$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

Si l'on se rappelle qu'on a posé au n° 5

$$\mu_i = \sqrt{\frac{a_i}{b_i}x} \quad \text{et} \quad \nu_i = \sqrt{\frac{b_i}{a_i}x}, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k+1)$$

on présentera les inégalités précédentes sous la forme suivante:

$$(1.) \quad (S_i) \ldots \begin{cases} 2\sqrt{a_i b_i x} < mb_i + na_i \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\dfrac{x}{a_{i+1} b_{i+1}}}, \\ 2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} < mb_{i+1} + na_{i+1} \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\dfrac{x}{a_i b_i}}, \quad mn \leqq x, \end{cases}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

D'après ce qui a été dit au n° 7, l'ensemble (Σ_i), $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sera défini par les inégalités

$$(2.) \quad (\Sigma_i) \ldots \begin{cases} m\beta_i' + n\alpha_i' > 2\sqrt{\alpha_i' \beta_i' x}, \quad m\beta_i'' + n\alpha_i'' > 2\sqrt{\alpha_i'' \beta_i'' x}, \\ m\beta_i + n\alpha_i \leqq 2\sqrt{\alpha_i \beta_i x}, \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

9. Les sommes $\sum_{(s_i)} f(m, n)$ et $\sum_{(\sigma_i)} f(m, n)$ peuvent être transformées à l'aide du changement des variables m et n.

Désignons

$$(3.) \qquad mb_i + na_i = m' \quad \text{et} \quad mb_{i+1} + na_{i+1} = n'.$$

En vertu des équations (1.) du n° 3, on aura

$$a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = 1,$$

et les équations précédentes donnent

$$(4.) \qquad m = -m' a_{i+1} + n' a_i \quad \text{et} \quad n = m' b_{i+1} - n' b_i.$$

Les équations (3.) et (4.) établissent une correspondance uniforme entre les systèmes (m, n) de variables entières m et n et les systèmes (m', n') de variables entières m' et n'.

Désignons par (S_i') l'ensemble des systèmes (m', n') qui correspond uniformément à l'ensemble (S_i).

Les inégalités (1.) qui définissent l'ensemble (S_i) se ramèneront, en vertu de (3.) et (4.), aux inégalités

$$\text{(I.)}\quad (S_i)\ldots\begin{cases} 2\sqrt{a_i b_i x} < m' \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\dfrac{x}{a_{i+1} b_{i+1}}}, \\ 2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} < n' \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\dfrac{x}{a_i b_i}}, \\ (-m' a_{i+1} + n' a_i)(m' b_{i+1} - n' b_i) \leqq x \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

qui définissent l'ensemble correspondant (S'_i).

En vertu de (4.), la somme $\underset{(s_i)}{\Sigma} f(m, n)$ peut être mise sous la forme

$$\underset{(s_i)}{\Sigma} f(m, n) = \underset{(s'_i)}{\Sigma} f(-m' a_{i+1} + n' a_i,\ m' b_{i+1} - n' b_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

De la même manière, en posant

$$m\beta'_i + n\alpha'_i = m' \quad \text{et} \quad m\beta''_i + n\alpha''_i = n',$$

on définira, en vertu de (2.), à l'aide des inégalités

$$\text{(II.)}\quad (\Sigma'_i)\ldots m' > 2\sqrt{\alpha'_i \beta'_i x},\ \underset{(i = 1, 2, \ldots, k)}{n' > 2\sqrt{\alpha''_i \beta''_i x}} \text{ et } m' + n' \leqq 2\sqrt{\alpha_i \beta_i x},$$

l'ensemble (Σ'_i) qui correspond uniformément à l'ensemble (Σ_i); la somme $\underset{(\sigma_i)}{\Sigma} f(m, n)$ aura pour expression

$$\underset{(\sigma_i)}{\Sigma} f(m, n) = \underset{(\sigma'_i)}{\Sigma} f(-m' \alpha''_i + n' \alpha'_i,\quad m' \beta''_i - n' \beta'_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

En réunissant les résultats obtenus, on arrive au théorème fondamental qui suit:

Théorème. *La somme* $\underset{(s)}{\Sigma} f(m, n)$ *peut être présentée sous la forme*

$$(*)\quad \begin{cases} \underset{(s)}{\Sigma} f(m, n) = \overset{i=k}{\underset{i=0}{\Sigma}} \underset{(s'_i)}{\Sigma} f(-m' a_{i+1} + n' a_i,\ m' b_{i+1} - n' b_i) \\ \qquad\qquad + \overset{i=k}{\underset{i=1}{\Sigma}} \underset{(\sigma'_i)}{\Sigma} f(-m' \alpha''_i + n' \alpha'_i,\ m' \beta''_i - n' \beta'_i) \end{cases}$$

à condition que les ensembles (S'_i), $(i = 0, 1, \ldots, k)$ ***et*** (Σ'_i), $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ***soient définis par les inégalités*** (I.) ***et*** (II.).

Application de la méthode de *Dirichlet* à la transformation de la somme $\underset{(s'_i)}{\Sigma} f(-m' a_{i+1} + n' a_i,\ m' b_{i+1} - n' b_i)$.

10. Considérons l'hyperbole définie par l'équation

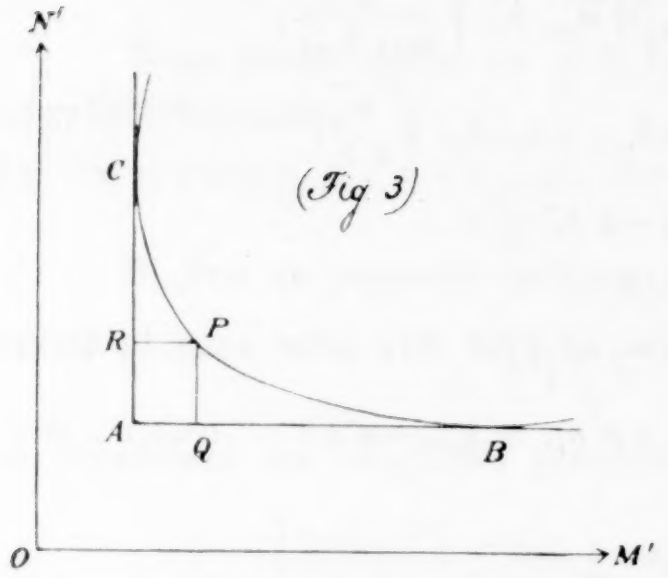
$$(-m' a_{i+1} + n' a_i)(m' b_{i+1} - n' b_i) = x$$

par rapport aux axes des coordonnées OM' et ON'.

Du point A ayant les coordonnées

$$2\sqrt{a_i b_i x} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x}$$

menons deux tangentes AB et AC à l'hyperbole (Fig. 3). Ces tangentes seront parallèles aux axes des coordonnées.



(Fig 3)

Les points du triangle curviligne ABC ayant les coordonnées entières formeront l'ensemble (S_i'), à condition que l'on ait exclu les points des tangentes AB et AC.

Prenons sur l'hyperbole un point quelconque P ayant les coordonnées μ' et ν' qui satisfont aux conditions

$$2\sqrt{a_i b_i x} < \mu' < (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\frac{x}{a_{i+1} b_{i+1}}},$$

$$2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} < \nu' < (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\frac{x}{a_i b_i}}.$$

Le point P dans ce cas se trouvera sur l'hyperbole entre les points B et C.

Menons du point P deux parallèles PR et PQ aux axes des coordonnées; on formera de cette manière un rectangle $AQPR$ et deux quadrilatères curvilignes $AQPC$ et $ARPB$.

Désignons par (S_{0i}) l'ensemble des points du rectangle $AQPR$ appartenant à l'ensemble (S_i'); par (S_{1i}') et (S_{2i}') désignons les ensembles des points des quadrilatères curvilignes $AQPC$ et $ARPB$ appartenant à l'ensemble (S_i').

On définira ces trois ensembles par les inégalités suivantes:

(1.) $(S_{0i}')\ldots \quad 2\sqrt{a_i b_i x} < m' \leqq \mu',\ 2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} < n' \leqq \nu';$

(2.) $(S_{1i}')\ldots$
$$\begin{cases} 2\sqrt{a_i b_i x} < m' \leqq \mu',\ 2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} < n' \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\dfrac{x}{a_i b_i}}, \\ (-m' a_{i+1} + n' a_i)\ (m' b_{i+1} - n' b_i) \leqq x; \end{cases}$$

(3.) $(S_{2i}')\ldots$
$$\begin{cases} 2\sqrt{a_i b_i x} < m' \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\dfrac{x}{a_{i+1} b_{i+1}}},\ 2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} < n' \leqq \nu', \\ (-m' a_{i+1} + n' a_i)\ (m' b_{i+1} - n' b_i) \leqq x, \end{cases}$$

où $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

11. On peut déterminer les ensembles (S'_{1i}) et (S'_{2i}) à l'aide des inégalités plus simples.

En supposant que le produit $a_i b_i$ est positif, on multipliera les deux parties de l'inégalité

$$(-m' a_{i+1} + n' a_i)\ (m' b_{i+1} - n' b_i) \leqq x$$

par $-4 a_i b_i$ et on mettra l'inégalité obtenue sous la forme

$$(4.) \qquad [-2 a_i b_i n' + m' (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)]^2 \geqq m'^2 - 4 a_i b_i x.$$

Dans cette inégalité, le nombre

$$-2 a_i b_i n' + m' (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)$$

est positif. En effet, à cause de (2.), on a les inégalités

$$-2 a_i b_i n' \geqq -(a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) \cdot 2\sqrt{a_i b_i x},$$

$$(a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) m' > (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) \cdot 2\sqrt{a_i b_i x}.$$

En additionnant ces inégalités, on trouve

$$-2 a_i b_i n' + (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) m' > 0.$$

Il en résulte que l'inégalité (4.) peut être remplacée par l'inégalité plus simple

$$-2 a_i b_i n' + (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) m' \geqq \sqrt{m'^2 - 4 a_i b_i x}$$

ou, ce qui revient au même, par l'inégalité

$$n' \leqq \frac{(a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) m' - \sqrt{m'^2 - 4 a_i b_i x}}{2 a_i b_i}.$$

En observant que la fonction

$$(5.) \qquad \frac{(a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) m' - \sqrt{m'^2 - 4 a_i b_i x}}{2 a_i b_i}$$

va toujours en décroissant dans l'intervalle

$$2\sqrt{a_i b_i x} < m' \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) \sqrt{\frac{x}{a_{i+1} b_{i+1}}}$$

et a la valeur maximum

$$(a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) \sqrt{\frac{x}{a_i b_i}},$$

on en conclut que les inégalités (2.) qui définissent l'ensemble (S'_{1i}) sont équivalentes aux inégalités

$$(S'_{1i}) \ldots 2\sqrt{a_i b_i x} < m' \leqq u',\ 2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} < n' \leqq \frac{(a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) m' - \sqrt{m'^2 - 4 a_i b_i x}}{2 a_i b_i}.$$

Dans le cas

$$a_i\, b_i = 0,$$

la fonction (5.) devient indéterminée; on cherchera dans ce cas sa vraie valeur, ce qui ne présente pas de difficultés.

De la même manière, on définira l'ensemble (S'_{2i}) à l'aide des inégalités

$$(S'_{2i}) \ldots 2\sqrt{a_i\, b_i\, x} < m' \leqq \frac{(a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i) n' - \sqrt{n'^2 - 4 a_{i+1}\, b_{i+1}\, x}}{2 a_{i+1} b_{i+1}},$$

$$2\sqrt{a_{i+1}\, b_{i+1}\, x} < n' \leqq \nu'.$$

En vertu de la définition des ensembles (S'_{0i}), (S'_{1i}) et (S'_{2i}), on aura cette formule:

$$(**) \quad \begin{cases} \sum\limits_{(s'_i)} f(-m' a_{i+1} + n' a_i,\ m' b_{i+1} - n' b_i) = \sum\limits_{(s'_{1i})} f(-m' a_{i+1} + n' a_i,\ m' b_{i+1} - n' b_i) \\ + \sum\limits_{(s'_{2i})} f(-m' a_{i+1} + n' a_i,\ m' b_{i+1} - n' b_i) - \sum\limits_{(s'_{0i})} f(-m' a_{i+1} + n' a_i,\ m' b_{i+1} - n' b_i). \end{cases}$$

12. Les coordonnées μ' et ν' du point P sur l'hyperbole sont liées, d'après la supposition faite, par l'équation

$$(-\mu' a_{i+1} + \nu' a_i)\ (\mu' b_{i+1} - \nu' b_i) = x.$$

Dans ce qui suit, on ne considérera que les valeurs de μ' et ν' qui rendent minimum la valeur de la somme $\mu' + \nu'$.

A cet effet, on doit poser

$$\mu' = (a_i\, d_i + b_i\, c_i) \sqrt{\frac{x}{c_i\, d_i}} \quad \text{et} \quad \nu' = (c_i\, b_{i+1} + d_i\, a_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{c_i\, d_i}}$$

où

$$c_i = a_i + a_{i+1} \quad \text{et} \quad d_i = b_i + b_{i+1}.$$

En substituant les valeurs choisies de μ' et ν' dans les inégalités (1.), (2.) et (3.), on définira les ensembles (S'_{0i}), (S'_{1i}) et (S'_{2i}) à l'aide des inégalités suivantes:

$$(\mathrm{I}_{0'})\ (S'_{0i}) \ldots \begin{cases} 2\sqrt{a_i\, b_i\, x} < m' \leqq (a_i\, d_i + b_i\, c_i) \sqrt{\dfrac{x}{c_i\, d_i}}, \\ 2\sqrt{a_{i+1}\, b_{i+1}\, x} < n' \leqq (c_i\, b_{i+1} + d_i\, a_{i+1}) \sqrt{\dfrac{x}{c_i\, d_i}}, \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}_{1'})\ (S_{1i}) \ldots \begin{cases} 2\sqrt{a_i\, b_i\, x} < m' \leqq (a_i\, d_i + b_i\, c_i) \sqrt{\dfrac{x}{c_i\, d_i}}, \\ 2\sqrt{a_{i+1}\, b_{i+1}\, x} < n' \leqq \dfrac{(a_i\, b_{i+1} + a_{i+1}\, b_i)\, m' - \sqrt{m'^2 - 4 a_i\, b_i\, x}}{2 a_i\, b_i}, \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}_2.)\ (S'_{2i})\ \ldots \begin{cases} 2\sqrt{a_i\, b_i\, x} < m' \leqq \dfrac{(a_i\, b_{i+1} + a_{i+1}\, b_i)\, n' - \sqrt{n'^2 - 4\, a_{i+1}\, b_{i+1}\, x}}{2\, a_{i+1}\, b_{i+1}}, \\ 2\sqrt{a_{i+1}\, b_{i+1}\, x} < n' \leqq (c_i\, b_{i+1} + d_i\, a_{i+1})\sqrt{\dfrac{x}{c_i\, d_i}}, \end{cases}$$

où

$$i = 0, 1, 2, \ldots k.$$

Seconde partie.

Recherche de la valeur approchée de la fonction numérique représentée par la somme $\sum_{n>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}$.

Définition des symboles $s\binom{a,\ b}{a',\ b'}$ et $\sigma\binom{a,\ b}{a',\ b'}$.

13. Le but des recherches ultérieures est d'étudier la fonction numérique $F(x)$ représentée par la somme

$$F(x) = \sum_{(s)} f(m, n)$$

dans le cas le plus simple où

$$f(m, n) = 1.$$

En effectuant la sommation par rapport à la variable entière m dans l'ensemble (S) défini par les inégalités

$$(S)\ \ldots\ m > 0, \quad n > 0 \quad \text{et} \quad mn \leqq x \quad \text{où} \quad x \geqq 1,$$

on présentera la fonction $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = \sum_{n>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}.$$

La formule fondamentale (*) du n° 9 conduit à une nouvelle expression de la fonction $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(s'_i)} f(-m'\, a_{i+1} + n'\, a_i,\ m'\, b_{i+1} - n'\, b_i) + \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(\sigma'_i)} f(-m'\, \alpha''_i + n'\, \alpha'_i,\ m'\, \beta'' - n'\, \beta'_i).$$

En vertu de la supposition faite, la somme

$$\sum_{(s'_i)} f(-m'\, a_{i+1} + n'\, a_i,\ m'\, b_{i+1} - n'\, b_i), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

représente le nombre des systèmes des nombres entiers m' et n' vérifiant les inégalités (I.) du n° 9

$$2\sqrt{a_i b_i x} < m' \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\frac{x}{a_{i+1} b_{i+1}}},$$

$$2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} < n' \leqq (a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i)\sqrt{\frac{x}{a_i b_i}},$$

$$(-m' a_{i+1} + n' a_i)\ (m' b_{i+1} - n' b_i) \leqq x.$$

La somme

$$\sum_{(\alpha_i')} f(-m'\alpha_i'' + n'\alpha_i',\ m'\beta_i'' - n'\beta_i'), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

représente le nombre des systèmes des valeurs entières de m' et n' vérifiant les inégalités (II.) du n° 9

$$m' > 2\sqrt{\alpha_i' \beta_i' x},\quad n' > 2\sqrt{\alpha_i'' \beta_i'' x} \quad \text{et} \quad m' + n' \leqq 2\sqrt{\alpha_i \beta_i x}$$

où

$$\alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i'' \quad \text{et} \quad \beta = \beta_i' + \beta_i'', \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

14. Soient a, b et a', b' des nombres entiers positifs ou nuls liés par la relation

$$(1) \qquad a b' - a' b = 1.$$

Introduisons dans nos recherches deux symboles

$$s\binom{a, b}{a', b'} \quad \text{et} \quad \sigma\binom{a, b}{a', b'}$$

en les définissant comme suit:

Définition. Le symbole $s\binom{a, b}{a', b'}$ *représente le nombre des systèmes des nombres entiers* m *et* n *vérifiant les inégalités*

$$2\sqrt{a b x} < m \leqq (a b' + a' b)\sqrt{\frac{x}{a' b'}}, \qquad 2\sqrt{a' b' x} < n \leqq (a b' + a' b)\sqrt{\frac{x}{a b}},$$

$$(-m a' + n a)\ (m b' - n b) \leqq x.$$

Le symbole $\sigma\binom{a, b}{a', b'}$ *représente le nombre des systèmes des valeurs entières des variables* m *et* n *vérifiant les inégalités*

$$m > 2\sqrt{a b x},\quad n > 2\sqrt{a' b' x} \quad \text{et} \quad m + n \leqq 2\sqrt{c d x}$$

où

$$c = a + a' \quad \text{et} \quad d = b + b'.$$

A l'aide des symboles introduits, on présentera la fonction $F(x)$ sous la forme

$$(*) \qquad F(x) = \sum_{i=0}^{i=k} s\begin{pmatrix} a_i, b_i \\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{i=k} \sigma\begin{pmatrix} \alpha_i', \beta_i' \\ \alpha_i'', \beta_i''\end{pmatrix}.$$

Transformation du symbole $s\begin{pmatrix} a, b \\ a', b'\end{pmatrix}$.

15. La méthode exposée aux n°s 10—12 peut servir à la transformation du symbole $s\begin{pmatrix} a, b \\ a', b'\end{pmatrix}$.

Désignons, pour un moment, par le symbole (S_0) le nombre des systèmes (m, n) vérifiant les inégalités $(I_{0.})$ du n° 12

$$(1.) \qquad (S_0)\ldots \begin{cases} 2\sqrt{abx} < m \leqq (ad+bc)\sqrt{\dfrac{x}{cd}}, \\ 2\sqrt{a'b'x} < n \leqq (cb'+da')\sqrt{\dfrac{x}{cd}}; \end{cases}$$

par le symbole (S_1) désignons le nombre des systèmes (m, n) vérifiant les inégalités $(I_{1.})$ du n° 12

$$(2.) \quad (S_1)\ldots \begin{cases} 2\sqrt{abx} < m \leqq (ad+bc)\sqrt{\dfrac{x}{cd}}, \\ 2\sqrt{a'b'x} < n \leqq \dfrac{(ab'+a'b)m - \sqrt{m^2-4abx}}{2ab}, \end{cases}$$

et enfin, par le symbole (S_2) le nombre des systèmes (m, n) vérifiant les inégalités $(I_{2.})$ du n° 12

$$(3.) \quad (S_2)\ldots \begin{cases} 2\sqrt{abx} < m \leqq \dfrac{(ab'+a'b)n - \sqrt{n^2-4a'b'x}}{2a'b'}, \\ 2\sqrt{a'b'x} < n \leqq (cb'+da')\sqrt{\dfrac{x}{cd}}. \end{cases}$$

En vertu de la formule (**) du n° 11, on aura l'égalité

$$(4.) \qquad s\begin{pmatrix} a, b \\ a', b'\end{pmatrix} = (S_1)+(S_2)-(S_0).$$

Désignons, pour abréger,

$$(5.) \quad \begin{cases} \eta = 2\sqrt{abx},\ \zeta = 2\sqrt{a'b'x},\ u = (ad+bc)\sqrt{\dfrac{x}{cd}},\ v = (cb'+da')\sqrt{\dfrac{x}{cd}}; \\ \varphi(m) = \dfrac{(ab'+a'b)m - \sqrt{m^2-4abx}}{2ab},\ \psi(n) = \dfrac{(ab'+a'b)n - \sqrt{n^2-4a'b'x}}{2a'b'}. \end{cases}$$

Dans le cas $ab = 0$ ou $a'b' = 0$, on cherchera la vraie valeur de la fonction $\varphi(m)$ ou $\psi(n)$.

Les inégalités (1.), (2.) et (3.) se présentent sous la forme plus simple:

$$(S_0) \ldots \eta < m \leqq \mu, \qquad \zeta < n \leqq \nu;$$
$$(S_1) \ldots \eta < m \leqq \mu, \qquad \zeta < n \leqq \varphi(m);$$
$$(S_2) \ldots \eta < m \leqq \psi(n), \qquad \zeta < n \leqq \nu.$$

En vertu de ces inégalités, on obtient sans peine

$$(S_0) = (E\mu - E\eta)(E\nu - E\zeta),$$
$$(S_1) = \sum_{m > \eta}^{m \leqq \mu} [E\varphi(m) - E\zeta] = \sum_{m > \eta}^{m \leqq \mu} E\varphi(m) - E\zeta(E\mu - E\eta),$$
$$(S_2) = \sum_{n > \zeta}^{n \leqq \nu} [E\psi(n) - E\eta] = \sum_{n > \zeta}^{n \leqq \nu} E\psi(n) - E\eta(E\nu - E\zeta),$$

et la formule (4.) se ramène à la suivante:

$$(6.) \qquad s\begin{pmatrix} a, b \\ a', b' \end{pmatrix} = \sum_{m > \eta}^{m \leqq \mu} E\varphi(m) + \sum_{n > \zeta}^{n \leqq \nu} E\psi(n) - E\mu\, E\nu + E\eta\, E\zeta.$$

16. Introduisons dans nos recherches la fonction périodique

$$r_0(u) = r_0(u+1)$$

définie par la formule

$$(7.) \qquad r_0(u) = Eu - u + \frac{1}{2}.$$

En vertu de cette formule, on a l'inégalité

$$(8.) \qquad |r_0(u)| \leqq \frac{1}{2},$$

quelle que soit la valeur réelle de la variable u.

A l'aide de la fonction $r_0(u)$, on présentera la somme

$$\sum_{m > \eta}^{m \leqq \mu} E\varphi(m) + \sum_{n > \zeta}^{n \leqq \nu} E\psi(n)$$

sous la forme suivante:

$$\sum_{m > \eta}^{m \leqq \mu} E\varphi(m) + \sum_{n > \zeta}^{n \leqq \nu} E\psi(n) = \sum_{m > \eta}^{m \leqq \mu} \left[\varphi(m) - \frac{1}{2}\right]$$
$$+ \sum_{n > \zeta}^{n \leqq \nu} \left[\psi(n) - \frac{1}{2}\right] + \sum_{m > \eta}^{m \leqq \mu} r_0[\varphi(m)] + \sum_{n > \zeta}^{n \leqq \nu} r_0[\psi(n)].$$

En vertu de (8.), on obtient l'inégalité

$$\left|\sum_{m>\eta}^{m\leqq\mu} r_0[\varphi(m)]+\sum_{n>\zeta}^{n\leqq\nu} r_0[\psi(n)]\right| \leqq \frac{1}{2}(E\mu-E\eta+E\nu-E\zeta)\leqq\frac{1}{2}(\mu+\nu-\eta-\zeta+2),$$

et l'égalité précédente peut s'écrire

$$\sum_{m>\eta}^{m\leqq\mu} E\varphi(m)+\sum_{n>\zeta}^{n\leqq\nu} E\psi(n)=\sum_{m>\eta}^{m\leqq\mu}\varphi(m)+\sum_{n>\zeta}^{n\leqq\nu}\psi(n) - \frac{1}{2}(E\mu+E\nu-E\eta-E\zeta)+\frac{\vartheta}{2}(\mu+\nu-\eta-\zeta+2)$$

où $|\vartheta|\leqq 1$.

En substituant le résultat obtenu dans la formule (6.) et en y remplaçant les symboles $E\mu$, $E\nu$, $E\eta$, $E\zeta$ par leurs expressions tirées de la formule (7.), on aura après les réductions

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} s\begin{pmatrix} a, b \\ a', b'\end{pmatrix} &= \sum_{m>\eta}^{m\leqq\mu}\varphi(m)+\sum_{n>\zeta}^{n\leqq\nu}\psi(n) \\ &\quad +\eta\zeta-\mu\nu+r_0(\eta)\zeta+r_0(\zeta)\eta-r_0(\mu)\nu-r_0(\nu)\mu \\ &\quad +r_0(\eta)r_0(\zeta)-r_0(\mu)r_0(\nu)+\frac{\vartheta}{2}(\mu+\nu-\eta-\zeta+2)\end{aligned}\right.$$

où $|\vartheta|\leqq 1$.

17. En vertu de la formule établie, on est conduit à chercher la valeur de la somme

$$(10.)\qquad \sum_{m>\eta}^{m\leqq\mu}\varphi(m)+\sum_{n>\zeta}^{n\leqq\nu}\psi(n),$$

$\varphi(m)$ et $\psi(n)$ étant deux fonctions algébriques.

La formule sommatoire d'*Euler* généralisée par *M. Sonine**) nous servira à ce but. D'après la formule de *M. Sonine,* la somme

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} f(n)$$

---

*) ***Sonine***: „Sur une intégrale définie contenant la fonction numérique $[x]$“ (Bulletins de l'Université de Varsovie, 1885, N. 3, *en russe*). Voyez aussi: *Franel* „Sur la formule sommatoire d'*Euler*“ (Mathematische Annalen, t. 47, p. 432) et *Wirtinger*, „Einige Anwendungen der *Euler-Maclaurin*schen Summenformel“ (Acta Mathematica, t. 26, p. 255).

aura pour expression

$$(**)\quad \sum_{n>a}^{n\leq b} f(n) = \int_a^b f(u)\,du + r_0(b)\,f(b) - r_0(a)\,f(a) - \int_a^b r_0(u)\,df(u),$$

quelles que soient les valeurs positives des limites de sommation a et b, la fonction $f(u)$ ayant la dérivée continue dans l'intervalle $a<u<b$.

En revenant à la somme (10.), envisageons en premier lieu le cas

$$\eta > 0 \qquad \text{et} \qquad \zeta > 0.$$

Les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, en vertu des égalités (5.), sont bien déterminées dans les intervalles correspondants

$$\eta < u < \mu \qquad \text{et} \qquad \zeta < u < \nu,$$

mais leurs dérivées $\varphi'(u)$ et $\psi'(u)$ deviennent infiniment grandes en valeur absolue quand $u = \eta$ et $u = \zeta$. En observant que néanmoins les intégrales définies

$$\int_\eta^\mu r_0(u)\,d\varphi(u) \qquad \text{et} \qquad \int_\zeta^\nu r_0(u)\,d\psi(u)$$

ont un sens, on démontrera sans peine que la formule sommatoire (**) est applicable à la somme (10.). On obtient les égalités

$$\sum_{m>\eta}^{m\leq\mu} \varphi(m) = \int_\eta^\mu \varphi(u)\,du + r_0(\mu)\,\varphi(\mu) - r_0(\eta)\,\varphi(\eta) - \int_\eta^\mu r_0(u)\,d\varphi(u),$$

$$\sum_{n>\zeta}^{n\leq\nu} \psi(n) = \int_\zeta^\nu \psi(u)\,du + r_0(\nu)\,\psi(\nu) - r_0(\zeta)\,\psi(\zeta) - \int_\zeta^\nu r_0(u)\,d\psi(u),$$

et la formule (9.) se ramène après les réductions à celle-ci:

$$(11.)\quad \left\{\begin{aligned} s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} &= \int_\eta^\mu \varphi(u)\,du + \int_\zeta^\nu \psi(u)\,du + \eta\zeta - \mu\nu - r_0(\eta)\,[\varphi(\eta)-\zeta] \\ &\quad - r_0(\zeta)\,[\psi(\zeta)-\eta] + r_0(\eta)\,r_0(\zeta) - r_0(\mu)\,r_0(\nu) - \int_\eta^\mu r_0(u)\,d\varphi(u) \\ &\quad - \int_\zeta^\nu r_0(u)\,d\psi(u) + \frac{\vartheta}{2}\,(\mu+\nu-\eta-\zeta+2) \end{aligned}\right.$$

où $|\vartheta| \leq 1$.

18. Dans le cas $\eta = 0$, on a $ab = 0$. La fonction $\varphi(m)$ définie par la formule (5.) devient indéterminée. En observant que

$$\varphi(m) = \frac{(ab'+a'b)\,m - \sqrt{m^2 - 4abx}}{2ab} = \frac{(ab'+a'b)^2\,m^2 - m^2 + 4abx}{2ab\,[(ab'+a'b)\,m + \sqrt{m^2-4abx}]}$$

et en se rappelant la condition (1.) du n° 14

$$ab' - a'b = 1,$$

on obtient

$$\varphi(m) = \frac{2a'b'm^2 + 2x}{(ab' + a'b)m + \sqrt{m^2 - 4abx}}; \tag{12.}$$

c'est la vraie valeur de la fonction $\varphi(m)$ dans le cas $ab = 0$.

Les conditions

$$ab = 0 \qquad \text{et} \qquad ab' - a'b = 1$$

ne sauraient être remplies par les nombres entiers et positifs ou nuls a, b, a', b' que dans le seul cas où

$$a = 1, \; b = 0 \qquad \text{et} \qquad b' = 1,$$

donc la formule (12.) se ramène à la suivante:

$$\varphi(m) = a'm + \frac{x}{m}. \tag{13.}$$

La formule sommatoire (**) n'est pas applicable à la somme $\sum_{m>0}^{m\leq\mu} \varphi(m)$, dans le cas considéré, puisque la fonction $\varphi(u)$ croît infiniment à mesure que la variable u tend vers la limite 0 et l'intégrale définie $\int_0^\mu \varphi(u)\,du$ n'a pas de sens.

On peut écarter la difficulté signalée à l'aide des considérations qui suivent. Soit η un nombre positif aussi petit que l'on voudra; on aura l'égalité évidente

$$\sum_{m>0}^{m\leq\mu} \varphi(m) = \sum_{m>\eta}^{m\leq\mu} \varphi(m)$$

à condition que

$$0 < \eta < 1.$$

Comme la formule sommatoire (**) est applicable à la seconde somme, on obtiendra

$$\sum_{m>0}^{m\leq\mu} \varphi(m) = \int_\eta^\mu \varphi(u)\,du + r_0(u)\,\varphi(u) - r_0(\eta)\,\varphi(\eta) - \int_\eta^\mu r_0(u)\,du, \qquad (0<\eta<1).$$

Il en résulte que la formule (11.), dans le cas $\eta = 0$, peut être modifiée de la manière suivante:

$$(14.)\quad \left\{\begin{aligned} s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b'\end{pmatrix} = \lim_{\eta=0}\Big\{ &\int_{\eta}^{\mu}\varphi(u)\,du+\int_{\zeta}^{\nu}\psi(u)\,du+\eta\zeta-\mu\nu-r_0(\eta)\,[\varphi(\eta)-\zeta]\\ &-r_0(\zeta)\,[\psi(\zeta)-\eta]+r_0(\eta)\,r_0(\zeta)-r_0(\mu)\,r_0(\nu)-\int_{\eta}^{\mu}r_0(u)\,d\varphi(u)\\ &-\int_{\zeta}^{\nu}r_0(u)\,d\psi(u)\Big\}+\frac{\vartheta}{2}(\mu+\nu-\zeta+2)\end{aligned}\right.$$

où $|\vartheta|\leq 1$.

De la même manière on examinera le cas $\zeta = 0$.

Valeur approchée du symbole $s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b'\end{pmatrix}$ dans le cas $a>0,\ b>0$ et $a'>0,\ b'>0$.

19. Supposons que les nombres entiers et positifs a, b, a', b' liés par la relation

$$(1.)\qquad ab'-a'b=1$$

satisfassent aux conditions

$$(2.)\qquad ab\leq t,\ a'b'\leq t \qquad \text{et} \qquad cd>t$$

où

$$c=a+a' \qquad \text{et} \qquad d=b+b'.$$

En effectuant dans la formule (11.) du n° 17 deux premières intégrations, on trouve

$$\int_{\eta}^{\mu}\varphi(u)\,du+\int_{\zeta}^{\nu}\psi(u)\,du=\frac{ab'+a'b-ad-bc}{4ab}\cdot\frac{x}{cd}+\frac{ab'+a'b-cb'-da'}{4a'b'}\cdot\frac{x}{cd}$$
$$+x\log\frac{ad+bc+1}{2\sqrt{abcd}}+x\log\frac{cb'+da'+1}{2\sqrt{a'b'cd}},$$

et, après les réductions, il vient

$$\int_{\eta}^{\mu}\varphi(u)\,du+\int_{\zeta}^{\nu}\psi(u)\,du=-\frac{x}{cd}+\frac{x}{2}\log\frac{ab'}{a'b}.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (11.) du n° 17 et en observant que

$$\eta\zeta-\mu\nu=-2x(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2+\frac{x}{cd},$$

$$\varphi(\eta)-\zeta=(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2\sqrt{\frac{x}{ab}},$$

$$\psi(\zeta)-\eta=(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2\sqrt{\frac{x}{a'b'}},$$

on trouve

$$(3.)\quad \begin{cases} s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \dfrac{x}{2}\log\dfrac{ab'}{a'b} - (\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2\left[2x + r_0(\eta)\sqrt{\dfrac{x}{ab}} + r_0(\zeta)\sqrt{\dfrac{x}{a'b'}}\right] \\ \qquad + r_0(\eta)\,r_0(\zeta) - r_0(\mu)\,r_0(\nu) - \int_\eta^\mu r_0(u)\,d\varphi(u) - \int_\zeta^\nu r_0(u)\,d\psi(u) \\ \qquad + \dfrac{\vartheta}{2}(\mu+\nu-\eta-\zeta+2) \end{cases}$$

où $|\vartheta| \leq 1$.

20. Examinons maintenant l'intégrale définie

$$\int_\eta^\mu r_0(u)\,d\varphi(u).$$

En vertu de l'égalité (5.) du n° 15, on aura

$$(4.)\quad \int_\eta^\mu r_0(u)\,d\varphi(u) = \int_\eta^\mu r_0(u)\left[\frac{ab'+a'b}{2ab} - \frac{1}{2ab}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\right]du.$$

Introduisons dans nos recherches la fonction périodique

$$r_1(u) = r_1(u+1)$$

définie par la formule

$$r_1(u) = \int_0^u r_0(u)\,du - \frac{1}{12};$$

la fonction $r_1(u)$ aura pour expression

$$r_1(u) = -\frac{(u-Eu)^2}{2} + \frac{u-Eu}{2} - \frac{1}{12}.$$

Il en résulte que la fonction $r_1(u)$ est continue et vérifie l'inégalité

$$(5.)\qquad |r_1(u)| \leq \frac{1}{12},$$

quelle que soit la valeur réelle de la variable u; on aura aussi l'inégalité

$$(6.)\qquad |r_1(u) - r_1(v)| \leq \frac{1}{8},$$

quelles que soient les valeurs réelles des variables u et v.

A l'aide de la fonction $r_1(u)$, on présentera l'intégrale définie (4.) sous la forme suivante:

$$(7.)\quad \int_\eta^\mu r_0(u)\,d\varphi(u) = \frac{ab'+a'b}{2ab}\,[r_1(\mu) - r_1(\eta)] - \frac{1}{2ab}\int_\eta^\mu r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du.$$

Cela posé, prenons un nombre positif ξ satisfaisant à la seule condition

$$\xi > \eta.$$

On écrira l'égalité évidente

$$(8.)\quad \int_\eta^\mu r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du = \int_\eta^\xi r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du + \int_\xi^\mu r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du.$$

On peut appliquer à l'intégrale définie

$$\int_\eta^\xi r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du$$

le premier théorème de la moyenne, puisque la fonction $\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}$ est positive entre les limites d'intégration; on obtiendra

$$\int_\eta^\xi r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du = \vartheta M \int_\eta^\xi \frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du \qquad \text{où} \qquad |\vartheta|<1,$$

M étant la limite supérieure des valeurs absolues de la fonction $r_0(u)$.

Comme la fonction positive $\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}$ varie toujours dans le même sens entre les limites de l'intégrale définie

$$\int_\xi^\mu r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du$$

et la fonction représentée par l'intégrale définie $\int_\xi^u r_0(u)\,du$ est continue, on aura

$$\int_\xi^\mu r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\int_\xi^\tau r_0(u)\,du + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-\eta^2}}\int_\tau^\mu r_0(u)\,du$$

où

$$\tau = \xi+\vartheta(\mu-\xi) \qquad \text{et} \qquad 0<\vartheta<1,$$

en vertu du second théorème de la moyenne.

En substituant les résultats obtenus dans l'égalité (8.) et en observant qu'à cause de l'inégalité (8.) du n° 16

$$M \leqq \frac{1}{2},$$

on trouve

$$\int_\eta^\mu r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du = \frac{\vartheta}{2}\sqrt{\xi^2-\eta^2} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\,[r_1(\tau)-r_1(\xi)] + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-\eta^2}}\,[r_1(\mu)-r_1(\tau)].$$

Cette égalité, en vertu de (6.), peut s'écrire

$$(9.)\quad \int_{\eta}^{\mu} r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du = \frac{\vartheta}{2}\left(\sqrt{\xi^2-\eta^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\right)+\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-\eta^2}}\,[r_1(\mu)-r_1(\tau)]$$

où $|\vartheta|<1$.

On pourrait maintenant déterminer la valeur du paramètre ξ de manière que la somme

$$\sqrt{\xi^2-\eta^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}$$

atteigne la valeur minimum, mais il suffira, pour le but que nous avons en vue, de poser

$$\xi = \sqrt{\eta^2+\frac{1}{4}\,\eta}.$$

Il viendra

$$(10.)\qquad \sqrt{\xi^2-\eta^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\eta}+\sqrt{\eta+\frac{1}{4}}\right).$$

En vertu de l'égalité

$$\eta = 2\sqrt{abx}$$

et de la supposition faite

$$ab \geqq 1, \qquad x \geqq 1,$$

on aura

$$\eta \geqq 2;$$

il s'ensuit

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{8}\,\eta.$$

En vertu de l'égalité (10.), on obtient

$$\sqrt{\xi^2-\eta^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \leqq \frac{\sqrt{\eta}}{2}\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right) < \frac{3}{2\sqrt{2}}\,\sqrt{\eta},$$

et la formule (9.) peut s'écrire

$$\int_{\eta}^{\mu} r_0(u)\,\frac{u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\,du = \vartheta\,\frac{3}{4\sqrt{2}}\,\sqrt{\eta}+\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-\eta^2}}\,[r_1(\mu)-r_1(\tau)]$$

où $|\vartheta|<1$.

En substituant le résultat obtenu dans la formule (7.) et en observant que

$$\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-\eta^2}} = ad+bc,$$

on trouve après les réductions

$$\int_{\eta}^{\mu} r_0(u)\,d\varphi(u) = -\frac{ab'+a'b}{2ab}\,r_1(\eta) - r_1(\mu) + \frac{ad+bc}{2ab}\,r_1(\tau) + \vartheta\,\frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{(ab)^3}}$$

ou bien

$$\int_{\eta}^{\mu} r_0(u)\,d\varphi(u) = -\frac{ab'+a'b}{2ab}\,r_1(\eta) + r_1(\tau) - r_1(\mu) + \frac{ab'+a'b}{2ab}\,r_1(\tau) + \vartheta\,\frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{(ab)^3}}.$$

L'égalité obtenue, en vertu des inégalités (5.) et (6.), peut s'écrire

$$(11.)\quad \int_{\eta}^{\mu} r_0(u)\,d\varphi(u) = -\frac{ab'+a'b}{2ab}\,r_1(\eta) + \vartheta\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\cdot\frac{ab'+a'b}{2ab} + \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{(ab)^3}}\right]$$

où $|\vartheta| < 1$.

Comme

$$ab'+a'b = 2\sqrt{ab\,a'b'} + \frac{1}{(\sqrt{ab'}+\sqrt{a'b})^2},$$

à cause de l'équation

$$ab'-a'b = 1,$$

on aura

$$\frac{ab'+a'b}{2ab} = \frac{\sqrt{a'b'}}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{2ab}\cdot\frac{1}{(\sqrt{ab'}+\sqrt{a'b})^2}.$$

En se rappelant que, d'après la supposition faite,

$$a'b' \leqq t$$

et en tenant compte de l'inégalité

$$ab\,(\sqrt{ab'}+\sqrt{a'b})^2 \geqq 1,$$

on obtient

$$\frac{ab'+a'b}{2ab} \leqq \sqrt{\frac{t}{ab}} + \frac{1}{2};$$

la formule (11.) se ramènera donc à la suivante:

$$(12.)\quad \int_{\eta}^{\mu} r_0(u)\,d\varphi(u) = -\frac{ab'+a'b}{2ab}\,r_1(\eta) + \vartheta\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{t}{ab}} + \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{(ab)^3}}\right]$$

où $|\vartheta| < 1$.

La formule obtenue subsiste à condition que $ab > 0$, elle peut donc être appliquée au cas $a'b' = 0$.

De la même manière on déduira la formule

$$(13.)\quad \int_{\zeta}^{\nu} r_0(u)\,d\psi(u) = -\frac{ab'+a'b}{2a'b'}\,r_1(\zeta)+\vartheta\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{t}{a'b'}}+\frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{(a'b')^3}}\right]$$

où $|\vartheta|<1$. Cette formule subsiste à condition que $a'b'>0$.

21. Examinons maintenant la somme $\mu+\nu-\eta-\zeta$. En vertu des égalités (5.) du n° 15, on aura

$$\mu+\nu-\eta-\zeta = (ad+bc)\sqrt{\frac{x}{cd}}+(cb'+da')\sqrt{\frac{x}{cd}}-2\sqrt{abx}-2\sqrt{a'b'x}$$

et, par suite,

$$(14.)\qquad \mu+\nu-\eta-\zeta = 2\sqrt{x}\,(\sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'}).$$

A l'aide de l'identité

$$\sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'} = \frac{1}{2\sqrt{cd}}\left[(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{cb'}-\sqrt{da'})^2\right]$$

et à l'aide des égalités

$$ad-bc=1 \quad \text{et} \quad cb'-da'=1,$$

on obtient

$$(15.)\quad \sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'} = \frac{1}{2\sqrt{cd}}\left[\frac{1}{(\sqrt{ad}+\sqrt{bc})^2}+\frac{1}{(\sqrt{cb'}+\sqrt{da'})^2}\right];$$

et comme

$$(\sqrt{ad}+\sqrt{bc})^2>4\sqrt{abcd}, \qquad (\sqrt{cb'}+\sqrt{da'})^2>4\sqrt{a'b'cd},$$

il vient

$$0<\sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'}<\frac{1}{8cd}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{a'b'}}\right).$$

En vertu de la supposition faite, on a

$$cd>t;$$

il en résulte

$$0<\sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'}<\frac{1}{8t}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{a'b'}}\right),$$

et, à cause de (14.), on peut écrire

$$(16.)\qquad \mu+\nu-\eta-\zeta = \vartheta\,\frac{\sqrt{x}}{4t}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{a'b'}}\right)$$

où $|\vartheta|<1$.

En substituant dans la formule (3.) les expressions obtenues (12.), (13.) et (16.) et en observant que

$$|r_0(\mu)\, r_0(\nu)| \leqq \frac{1}{4}, \tag{17.}$$

on arrivera à la formule importante qui suit:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} s\binom{a,b}{a',b'} = \dfrac{x}{2}\log\dfrac{ab'}{a'b} - (\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2\left[2x + r_0(\eta)\sqrt{\dfrac{x}{ab}} + r_0(\zeta)\sqrt{\dfrac{x}{a'b'}}\right] \\ \quad + r_0(\eta)\, r_0(\zeta) + \dfrac{ab'+a'b}{2ab}\, r_1(\eta) + \dfrac{ab'+a'b}{2a'b'}\, r_1(\zeta) + \vartheta\,[R(ab)+R(a'b')] \end{cases}$$

où $|\vartheta|<1$ et la fonction $R(u)$ est définie par l'égalité

$$R(u) = \frac{19}{24} + \left(\frac{\sqrt{x}}{8t} + \frac{\sqrt{t}}{12}\right)\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{u^3}}. \tag{18.}$$

Valeurs approchées des symboles $s\binom{1,0}{a',1}$ et $s\binom{1,b}{0,1}$.

22. Dans le cas où $\eta = 0$, on a, comme nous avons vu au n° 18, les égalités

$$a = 1,\ b = 0 \quad \text{et} \quad b' = 1.$$

En vertu de la formule (13.) du n° 18, on aura dans le cas considéré

$$\varphi(u) = a'u + \frac{x}{u},$$

et la formule (14.) du n° 18 se ramènera à celle-ci:

$$\text{(1.)}\quad \begin{cases} s\binom{1,0}{a',1} = \lim\limits_{\eta=0}\left\{\displaystyle\int_\eta^\mu \frac{x}{u}\,du - r_0(\eta)\frac{x}{\eta} - \int_\eta^\mu r_0(u)\,d\frac{x}{u}\right\} \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^\mu a'u\,du + \int_\zeta^\nu \psi(u)\,du - \mu\nu \\ + r_0(0)\,\zeta - r_0(\zeta)\,\psi(\zeta) + r_0(0)\,r_0(\zeta) - r_0(\mu)\,r_0(\nu) \\ \qquad - \displaystyle\int_0^\mu r_0(u)\,a'\,du - \int_\zeta^\nu r_0(u)\,d\psi(u) + \frac{\vartheta}{2}(\mu+\nu-\zeta+2) \end{cases}$$

où $|\vartheta|\leqq 1$.

La somme

$$\int_\eta^\mu \frac{x}{u}\,du - r_0(\eta)\frac{x}{\eta} - \int_\eta^\mu r_0(u)\,d\frac{x}{u}$$

ne dépend pas du paramètre η à condition que $0<\eta<1$, et peut être

transformée de la manière suivante. Soit M un nombre positif aussi grand que l'on voudra. Considérons la somme $\sum_{m>0}^{m\leq M} \frac{1}{m}$. Comme $0<\eta<1$, on aura

$$\sum_{m>0}^{m\leq M} \frac{1}{m} = \sum_{m>\eta}^{m\leq M} \frac{1}{m},$$

et la formule sommatoire (**) du n° 17 donne

$$\sum_{m>0}^{m\leq M} \frac{1}{m} = \int_{\eta}^{M} \frac{du}{u} + \frac{r_0(M)}{M} - \frac{r_0(\eta)}{\eta} - \int_{\eta}^{M} r_0(u)\, d\frac{1}{u}.$$

De cette égalité on tire

$$\sum_{m>0}^{m\leq M} \frac{1}{m} - \log M = \frac{r_0(M)}{M} - \log \eta - \frac{r_0(\eta)}{\eta} + \int_{\eta}^{M} r_0(u) \frac{du}{u^2}.$$

La seconde partie de cette égalité tend vers une limite fixe quand M croît infiniment, et comme la première partie de l'égalité considérée ne dépend pas de η, on en conclut que cette limite est une constante fixe.

En désignant

$$\lim_{M=\infty} \left\{ \sum_{m>0}^{m\leq M} \frac{1}{m} - \log M \right\} = C, \tag{2.}$$

on aura

$$C = -\log \eta - \frac{r_0(\eta)}{\eta} + \int_{\eta}^{\infty} r_0(u) \frac{du}{u^2}. \tag{3.}$$

La constante C déterminée par la formule (2.) s'appelle constante d'*Euler*.

En multipliant les deux parties de l'égalité (3.) par x, on écrira

$$\int_{\eta}^{\mu} \frac{x}{u}\, du - r_0(\eta)\frac{x}{\eta} - \int_{\eta}^{\mu} r_0(u)\, d\frac{x}{u} = Cx + x\log\mu + \int_{\mu}^{\infty} r_0(u)\, d\frac{x}{u}.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (1.), on trouvera après les réductions simples

$$\left\{\begin{aligned} s\begin{pmatrix}1, 0\\ a', 1\end{pmatrix} = {} & \frac{x}{2}\log\frac{x}{a'} + Cx - \frac{3}{2}x + r_0(0)\cdot 2\sqrt{a'x} - r_0(\zeta)\sqrt{\frac{x}{a'}} \\ & + r_0(0)\, r_0(\zeta) - r_0(\mu)\, r_0(\nu) - r_1(\mu)\, a' + r_1(0)\, a' \\ & + \int_{\mu}^{\infty} r_0(u)\, d\frac{x}{u} - \int_{\zeta}^{\nu} r_0(u)\, d\psi(u) + \frac{\vartheta}{2}(\mu+\nu-\zeta+2) \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

où $|\vartheta| \leq 1$.

23. En observant que

$$\int_{\mu}^{\infty} r_0(u)\, d\frac{x}{u} = -\frac{x}{\mu^2}\int_{\mu}^{\xi} r_0(u)\, du \quad \text{où} \quad \xi > \mu,$$

on obtient

$$\int_{\mu}^{\infty} r_0(u)\, d\frac{x}{u} = \frac{x}{\mu^2} r_1(\mu) - \frac{x}{\mu^2} r_1(\xi);$$

et comme

$$u = (ad+bc)\sqrt{\frac{x}{cd}} = \sqrt{\frac{x}{a'+1}},$$

il vient

$$\int_{\mu}^{\infty} r_0(u)\, d\frac{x}{u} = (a'+1)\, r_1(\mu) - (a'+1)\, r_1(\xi).$$

Il en résulte

$$-a'\, r_1(\mu) + \int_{\mu}^{\infty} r_0(u)\, d\frac{x}{u} = r_1(\mu) - r_1(\xi) - a'\, r_1(\xi).$$

Comme

$$|r_1(\mu) - r_1(\xi)| \leqq \frac{1}{8}, \quad |r_1(\xi)| \leqq \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad a'b' = a' \leqq t,$$

on peut présenter l'égalité précédente sous la forme suivante:

$$(5.) \qquad -a'\, r_1(\mu) + \int_{\mu}^{\infty} r_1(u)\, d\frac{x}{u} = \vartheta\left(\frac{1}{8} + \frac{t}{12}\right) \quad \text{où} \quad |\vartheta| \leqq 1.$$

En vertu de la formule (13.) du n° 20, on aura

$$(6.) \qquad \int_{\zeta}^{\nu} r_0(u)\, d\psi(u) = -\frac{1}{2a'} r_1(\zeta) + \vartheta\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{t}{a'}} + \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{(a')^3}}\right] \quad \text{où} \quad |\vartheta| < 1.$$

Enfin, à l'aide de l'égalité (15.) du n° 21, on obtient

$$\mu + \nu - \zeta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a'+1}}\left[\frac{1}{(\sqrt{a'+1} + \sqrt{a'})^2} + 1\right];$$

il en résulte

$$0 < \mu + \nu - \zeta < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a'+1}}\left[\frac{1}{4\sqrt{a'(a'+1)}} + 1\right];$$

et comme, d'après la supposition faite au n° 19,

$$a'b' = a' \leqq t \quad \text{et} \quad cd = a'+1 > t,$$

on peut poser

$$(7.) \qquad \mu+\nu-\zeta=\vartheta\left(\frac{\sqrt{x}}{4t}\cdot\frac{1}{\sqrt{a'}}+\sqrt{\frac{x}{t}}\right) \quad \text{où} \quad |\vartheta|<1.$$

En substituant les expressions (5.), (6.) et (7.) dans la formule (4.) et ayant égard à l'inégalité (17.) du n° 21, on trouvera

$$(\mathrm{I}'.) \quad \begin{cases} s\binom{1,0}{a',1}=\frac{x}{2}\log\frac{x}{a'}+Cx-\frac{3}{2}x+r_0(0)\cdot 2\sqrt{a'x}-r_0(\zeta)\sqrt{\frac{x}{a'}} \\ \qquad +r_0(0)\,r_0(\zeta)+r_1(0)\,a'+\frac{1}{2a'}r_1(\zeta)+\vartheta\left[R(a')+\frac{3}{4}+\frac{t}{12}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{t}}\right] \end{cases}$$

où $|\vartheta|<1$, la fonction $R(u)$ étant définie par la formule (18.) du n° 21.

De la même manière, on déduira la formule

$$(\mathrm{I}''.) \quad \begin{cases} s\binom{1,b}{0,1}=\frac{x}{2}\log\frac{x}{b}+Cx-\frac{3}{2}x+r_0(0)\cdot 2\sqrt{bx}-r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{b}} \\ \qquad +r_0(0)\,r_0(\eta)+r_1(0)\,b+\frac{1}{2b}r_1(\eta)+\vartheta\left[R(b)+\frac{3}{4}+\frac{t}{12}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{t}}\right] \end{cases}$$

où $|\vartheta|<1$.

Transformation du symbole $\sigma\binom{a,b}{a',b'}$.

24. D'après la définition établie au n° 14, le symbole $\sigma\binom{a,b}{a',b'}$ représente le nombre des systèmes des nombres entiers m et n vérifiant les inégalités

$$m>2\sqrt{abx}, \quad n>2\sqrt{a'b'x} \quad \text{et} \quad m+n\leqq 2\sqrt{cdx}.$$

En désignant, pour abréger,

$$\eta=2\sqrt{abx}, \quad \zeta=2\sqrt{a'b'x} \quad \text{et} \quad \xi=2\sqrt{cdx},$$

on aura les inégalités

$$m>\eta, \quad n>\zeta \quad \text{et} \quad m+n\leqq\xi$$

et on déduira sans peine la formule

$$\sigma\binom{a,b}{a',b'}=\frac{1}{2}(E\xi-E\eta-E\zeta)\,(E\xi-E\eta-E\zeta-1).$$

A l'aide de la fonction périodique $r_0(u)$ définie au n° 16, on présentera cette formule sous la forme suivante:

$$\sigma\binom{a,b}{a',b'}=\frac{1}{2}(\xi-\eta-\zeta)^2+(\xi-\eta-\zeta)\,[r_0(\xi)-r_0(\eta)-r_0(\zeta)]$$
$$+r_0(\eta)r_0(\zeta)-r_0(\zeta)r_0(\xi)-r_0(\xi)r_0(\eta)+\frac{1}{2}r_0^2(\xi)+\frac{1}{2}r_0^2(\eta)+\frac{1}{2}r_0^2(\zeta)-\frac{1}{8}.$$

En introduisant la fonction périodique $r_1(u)$ définie au n° 20 et en observant que

$$r_0^2(u) = -2r_1(u) + \frac{1}{12},$$

on obtient la formule

$$(1.)\quad \left\{ \begin{aligned} \sigma\begin{pmatrix} a, b \\ a', b' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(\xi-\eta-\zeta)^2 + (\xi-\eta-\zeta)\,[r_0(\xi)-r_0(\eta)-r_0(\zeta)] \\ &\quad + r_0(\eta)r_0(\zeta) - r_0(\zeta)\,r_0(\xi) - r_0(\xi)\,r_0(\eta) - r_1(\xi) - r_1(\eta) - r_1(\zeta). \end{aligned} \right.$$

25. ***Théorème.*** ***Supposons que le symbole*** $\tau\begin{pmatrix} a, b \\ a', b' \end{pmatrix}$ ***soit défini par l'égalité***

$$(\mathrm{II.})\quad \left\{ \begin{aligned} \tau\begin{pmatrix} a, b \\ a', b' \end{pmatrix} &= -(\sqrt{ab'} - \sqrt{a'b})^2 \left[2x + r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{ab}} + r_0(\zeta)\sqrt{\frac{x}{a'b'}} \right] \\ &\quad + r_0(\eta)r_0(\zeta) + \frac{ab'+a'b}{2ab}r_1(\eta) + \frac{ab'+a'b}{2a'b'}r_1(\zeta) \end{aligned} \right.$$

dans le cas $a>0$, $b>0$, $a'>0$, $b'>0$ ***et que les symboles*** $\tau\begin{pmatrix} 1, 0 \\ a', 1 \end{pmatrix}$, $\tau\begin{pmatrix} 1, b \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ ***et*** $\tau\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ ***soient définis à l'aide des égalités***

$$(\mathrm{II'.})\quad \left\{ \begin{aligned} \tau\begin{pmatrix} 1, 0 \\ a', 1 \end{pmatrix} &= -2x + r_0(0)\cdot 2\sqrt{a'x} - r_0(\zeta)\sqrt{\frac{x}{a'}} \\ &\quad + r_0(0)\,r_0(\zeta) + a'r_1(0) + \frac{1}{2a'}r_1(\zeta), \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{II''.})\quad \left\{ \begin{aligned} \tau\begin{pmatrix} 1, b \\ 0, 1 \end{pmatrix} &= -2x + r_0(0)\cdot 2\sqrt{bx} - r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{b}} \\ &\quad + r_0(0)\,r_0(\eta) + br_1(0) + \frac{1}{2b}r_1(\eta), \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{II'''.})\qquad \tau\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} = -2x + r_0(0)\,r_0(0) = -2x + \frac{1}{4}.$$

On aura la formule

$$(\mathrm{III.})\qquad \sigma\begin{pmatrix} a, b \\ a', b' \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} a, b \\ a', b' \end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix} c, d \\ a', b' \end{pmatrix},$$

quelles que soient les valeurs entières et positives ou nulles des nombres a, b, a', b' ***liés par la relation***

$$ab' - a'b = 1.$$

D'après la définition établie, on aura dans le cas

$$a>0,\ b>0,\ a'>0,\ b'>0$$

l'égalité

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\tau\begin{pmatrix}a,b\\a',b'\end{pmatrix}-\tau\begin{pmatrix}a,b\\c,d\end{pmatrix}-\tau\begin{pmatrix}c,d\\a',b'\end{pmatrix}\\
&\qquad=2x[(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{cb'}-\sqrt{da'})^2-(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2]\\
&\quad+r_0(\xi)[(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{cb'}-\sqrt{da'})^2]\sqrt{\frac{x}{cd}}\\
&\quad-r_0(\eta)[(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2-(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2]\sqrt{\frac{x}{ab}}\\
&\quad-r_0(\zeta)[(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2-(\sqrt{cb'}-\sqrt{da'})^2]\sqrt{\frac{x}{a'b'}}\\
&\quad+r_0(\eta)r_0(\zeta)-r_0(\zeta)r_0(\xi)-r_0(\xi)r_0(\eta)\\
&\quad-r_1(\xi)\Big[\frac{ad+bc}{2cd}+\frac{cb'+da'}{2cd}\Big]-r_1(\eta)\Big[\frac{ad+bc}{2ab}-\frac{ab'+a'b}{2ab}\Big]\\
&\qquad-r_1(\zeta)\Big[\frac{cb'+da'}{2a'b'}-\frac{ab'+a'b}{2a'b'}\Big].
\end{aligned}\right.$$

Ayant égard aux identités

$$\begin{aligned}
(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{cb'}-\sqrt{da'})^2-(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2 &= (\sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'})^2,\\
[(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{cb'}-\sqrt{da'})^2]\frac{1}{\sqrt{cd}} &= 2(\sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'}),\\
[(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2-(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2]\frac{1}{\sqrt{ab}} &= 2(\sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'}),\\
[(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b})^2-(\sqrt{cb'}-\sqrt{da'})^2]\frac{1}{\sqrt{a'b'}} &= 2(\sqrt{cd}-\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'}),
\end{aligned}$$

$$\frac{ad+bc}{2cd}+\frac{cb'+da'}{2cd}=1,\quad \frac{ad+bc}{2ab}-\frac{ab'+a'b}{2ab}=1,\quad \frac{cb'+da'}{2a'b'}-\frac{ab'+a'b}{2a'b'}=1,$$

on ramènera l'égalité (2.), en vertu de (1.), à la formule (III.), ce qui démontre le théorème énoncé dans le cas $a>0, b>0, a'>0, b'>0$.

De la même manière, on vérifiera la formule (III.) dans les cas $ab=0$ ou $a'b'=0$.

Valeur approchée de la somme $\sum_{n>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}$.

26. Nous avons vu au n° 14 que la fonction numérique $F(x)$ représentée par la somme

$$F(x)=\sum_{>0}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}$$

peut être mise sous la forme

$$(*) \qquad F(x) = \sum_{i=0}^{i=k} s\begin{pmatrix} a_i, b_i \\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{i=k} \sigma\begin{pmatrix} \alpha'_i, \beta'_i \\ \alpha''_i, \beta''_i\end{pmatrix}.$$

En vertu de la formule (III.) du n° 25, on aura l'égalité

$$(1.) \quad \sum_{i=1}^{i=k} \sigma\begin{pmatrix} \alpha'_i, \beta'_i \\ \alpha''_i, \beta''_i\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{i=k} \tau\begin{pmatrix} \alpha'_i, \beta'_i \\ \alpha''_i, \beta''_i\end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{i=k}\left[\tau\begin{pmatrix} \alpha'_i, \beta'_i \\ \alpha_i, \beta_i\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix} \alpha_i, \beta_i \\ \alpha''_i, \beta''_i\end{pmatrix}\right]$$

où

$$\alpha_i = \alpha'_i + \alpha''_i \quad \text{et} \quad \beta_i = \beta'_i + \beta''_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

La seconde partie de cette égalité peut être remarquablement simplifiée.

A cet effet, rappelons-nous le procédé à l'aide duquel on a formé au n° 3 la série de *Farey*

$$(2.) \qquad \frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$$

où

$$a_0 = 1, \; b_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_{k+1} = 0, \; b_{k+1} = 1.$$

En désignant

$$\alpha'_1 = 1, \; \beta'_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha''_1 = 0, \; \beta''_1 = 1,$$

on a intercalé entre les nombres $\frac{\alpha'_1}{\beta'_1}$ et $\frac{\alpha''_1}{\beta''_1}$ la fraction $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, puis on a choisi l'une de deux paires des fractions

$$\frac{\alpha'_1}{\beta'_1}, \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha''_1}{\beta''_1}$$

et en les désignant par

$$\frac{\alpha'_2}{\beta'_2} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha''_2}{\beta''_2},$$

on a intercalé entre ces fractions la fraction $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, etc.

On a effectué de cette manière k intercalations suivantes:

1) entre les fractions $\frac{\alpha'_1}{\beta'_1}$ et $\frac{\alpha''_1}{\beta''_1}$ on a intercalé $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$,

2) entre les fractions $\frac{\alpha'_2}{\beta'_2}$ et $\frac{\alpha''_2}{\beta''_2}$ on a intercalé $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$,

. . . . . .

k) entre les fractions $\frac{\alpha'_k}{\beta'_k}$ et $\frac{\alpha''_k}{\beta''_k}$ on a intercalé $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$.

Formons la série

$$(3.)\qquad \left(\frac{\alpha'_1}{\beta'_1}, \frac{\alpha''_1}{\beta''_1}\right), \left(\frac{\alpha'_2}{\beta'_2}, \frac{\alpha''_2}{\beta''_2}\right), \ldots\ldots \left(\frac{\alpha'_k}{\beta'_k}, \frac{\alpha''_k}{\beta''_k}\right)$$

et considérons une paire

$$\frac{\alpha'_\nu}{\beta'_\nu} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha''_\nu}{\beta''_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

des fractions qui se trouvent dans cette série Entre les fractions choisies, on a intercalé, d'après la supposition faite, la fraction $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ et on a obtenu les deux paires de fractions contiguës

$$(4.)\qquad \frac{\alpha'_\nu}{\beta'_\nu}, \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}, \frac{\alpha''_\nu}{\beta''_\nu}.$$

Si, en continuant les intercalations, on a intercalé entre les fractions $\frac{\alpha'_\nu}{\beta'_\nu}$ et $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ une nouvelle fraction, la paire $\frac{\alpha'_\nu}{\beta'_\nu}$ et $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ doit appartenir à la série (3.), et on peut poser

$$\frac{\alpha'_\nu}{\beta'_\nu} = \frac{\alpha'_i}{\beta'_i} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\alpha''_i}{\beta''_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Si, au contraire, on n'a pas intercalé entre les fractions $\frac{\alpha'_\nu}{\beta'_\nu}$ et $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ la fraction $\frac{\alpha'_\nu + \alpha_\nu}{\beta'_\nu + \beta_\nu}$, la paire $\frac{\alpha'_\nu}{\beta'_\nu}$ et $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ n'appartiendra pas à la série (3.); elle se trouvera dans la série de ***Farey*** (2.) et on peut dans ce cas poser

$$\frac{\alpha'_\nu}{\beta'_\nu} = \frac{a_i}{b_i} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

De la même manière on examinera la seconde paire de fractions (4.).

Comme la série de ***Farey*** (2.) a été obtenue à l'aide des intercalations successives, il en résulte que toutes les $k+1$ paires des fractions contiguës

$$(5.)\qquad \left(\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}\right), \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right), \ldots, \left(\frac{a_k}{b_k}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$$

se trouveront parmi $2k$ paires des fractions

$$(6.)\ \left(\frac{\alpha'_1}{\beta'_1}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right), \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha''_1}{\beta''_1}\right), \left(\frac{\alpha'_2}{\beta'_2}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right), \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha''_2}{\beta''_2}\right), \ldots, \left(\frac{\alpha'_k}{\beta'_k}, \frac{\alpha_k}{\beta_k}\right), \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}, \frac{\alpha''_k}{\beta''_k}\right).$$

On en conclut que dans la dernière série se trouvent $k-1$ paires des fractions qui n'appartiennent pas à la série (5.); en vertu de ce qui a été dit précédemment, ces $k-1$ paires des fractions appartiendront à la

série (3.). Mais la première paire de fractions de la série (3.) n'est autre que la paire $\left(\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right)$ qui n'appartient pas à la série (6.), donc toutes les $k-1$ paires de fractions

$$(7.) \qquad \left(\frac{\alpha'_2}{\beta'_2}, \frac{\alpha''_2}{\beta''_2}\right), \left(\frac{\alpha'_3}{\beta'_3}, \frac{\alpha''_3}{\beta''_3}\right), \ldots, \left(\frac{\alpha'_k}{\beta'_k}, \frac{\alpha''_k}{\beta''_k}\right)$$

de la série (3.) se trouvent parmi celles de la série (6.)

Il est donc démontré que l'ensemble des paires de fractions appartenant aux séries (5.) et (7.) ne diffère de la série (6.) que par la disposition des termes.

On en tire l'égalité importante qui suit:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \left[\tau\begin{pmatrix}\alpha'_i, \beta'_i\\ \alpha_i, \beta_i\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}\alpha_i, \beta_i\\ \alpha''_i, \beta''_i\end{pmatrix}\right] = \sum_{i=2}^{i=k} \tau\begin{pmatrix}\alpha'_i, \beta'_i\\ \alpha''_i, \beta''_i\end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{i=k} \tau\begin{pmatrix}a_i, b_i\\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix}.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (1.), on trouvera

$$\sum_{i=1}^{i=k} \sigma\begin{pmatrix}\alpha'_i, \beta'_i\\ \alpha''_i, \beta''\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix} - \sum_{i=0}^{i=k} \tau\begin{pmatrix}a_i, b_i\\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix},$$

et la formule (*) se ramènera à celle-ci:

$$(8.) \qquad F(x) = \tau\begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{i=k} \left[s\begin{pmatrix}a_i, b_i\\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix}a_i, b_i\\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix}\right].$$

27. D'après la supposition faite au n° 3, les nombres $a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ satisfont aux conditions (1.) et (2.) du n° 19; il en résulte que la valeur approchée du symbole $s\begin{pmatrix}a_i, b_i\\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix}$ peut être déterminée à l'aide des formules obtenues précédemment.

En attribuant à l'indice i les valeurs $i = 1, 2, \ldots, k-1$, on aura les inégalités

$$a_i > 0,\ b_i > 0,\ a_{i+1} > 0,\ b_{i+1} > 0,$$

donc la valeur du symbole $s\begin{pmatrix}a_i, b_i\\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix}$ sera exprimée par la formule (I.) du n° 21

$$(9.) \quad \left\{\begin{aligned} s\begin{pmatrix}a_i, b_i\\ a_{i+1}, b_{i+1}\end{pmatrix} &= \frac{x}{2} \log \frac{a_i b_{i+1}}{a_{i+1} b_i} - \left(\sqrt{a_i b_{i+1}} - \sqrt{a_{i+1} b_i}\right)^2 \left[2x + r_0(\eta_i)\sqrt{\frac{x}{a_i b_i}}\right. \\ &\left. + r_0(\zeta_i)\sqrt{\frac{x}{a_{i+1} b_{i+1}}}\right] + r_0(\eta_i) r_0(\zeta_i) + \frac{a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i}{2 a_i b_i} r_1(\eta_i) \\ &+ \frac{a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i}{2 a_{i+1} b_{i+1}} r_1(\zeta_i) + \vartheta\left[R(a_i b_i) + R(a_{i+1} b_{i+1})\right] \end{aligned}\right.$$

où $|\vartheta|<1$ et

$$(10.)\qquad \begin{cases} \eta_i = 2\sqrt{a_i b_i x}, \quad \zeta_i = 2\sqrt{a_{i+1} b_{i+1} x} \\ R(u) = \frac{19}{24} + \left(\frac{\sqrt{x}}{8t} + \frac{\sqrt{t}}{12}\right)\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{u^3}}. \end{cases}$$

D'autre part, la valeur du symbole $\tau\binom{a_i, b_i}{a_{i+1}, b_{i+1}}$, en vertu de la formule (II.) du n° 25, sera

$$\tau\binom{a_i, b_i}{a_{i+1}, b_{i+1}} = -(\sqrt{a_i b_{i+1}} - \sqrt{a_{i+1} b_i})^2 \left[2x + r_0(\eta_i)\sqrt{\frac{x}{a_i b_i}} + r_0(\zeta_i)\sqrt{\frac{x}{a_{i+1} b_{i+1}}}\right]$$
$$+ r_0(\eta_i) r_0(\zeta_i) + \frac{a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i}{2 a_i b_i} r_1(\eta_i) + \frac{a_i b_{i+1} + a_{i+1} b_i}{2 a_{i+1} b_{i+1}} r_1(\zeta_i);$$

il s'ensuit, à cause de (9.),

$$(11.)\quad s\binom{a_i, b_i}{a_{i+1}, b_{i+1}} - \tau\binom{a_i, b_i}{a_{i+1}, b_{i+1}} = \frac{x}{2}\log\frac{a_i b_{i+1}}{a_{i+1} b_i} + \vartheta[R(a_i b_i) + R(a_{i+1} b_{i+1})]$$

où $|\vartheta|<1$ et $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Dans le cas $i = 0$, on aura

$$(12.)\qquad a_0 = 1,\ b_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 > 0,\ b_1 = 1.$$

Les valeurs des symboles $s\binom{1, 0}{a_1, 1}$ et $\tau\binom{1, 0}{a_1, 1}$ seront exprimées par la formule (I'.) du n° 23 et par la formule (II'.) du n° 25.

En vertu de ces formules, on obtient

$$(13.)\quad s\binom{1, 0}{a_1, 1} - \tau\binom{1, 0}{a_1, 1} = \frac{x}{2}\log\frac{x}{a_1} + Cx + \frac{x}{2} + \vartheta\left[R(a_1) + \frac{3}{4} + \frac{t}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{t}}\right]$$

où $|\vartheta|<1$.

Dans le cas $i = k$, on aura

$$(14.)\qquad a_k = 1,\ b_k > 0 \quad \text{et} \quad a_{k+1} = 0,\ b_{k+1} = 1;$$

les valeurs des symboles $s\binom{1, b_k}{0, 1}$ et $\tau\binom{1, b_k}{0, 1}$ seront exprimées par la formule (I''.) du n° 23 et par la formule (II''.) du n° 25.

En vertu de ces formules, on obtient

$$(15.)\quad s\binom{1, b_k}{0, 1} - \tau\binom{1, b_k}{0, 1} = \frac{x}{2}\log\frac{x}{b_k} + Cx + \frac{x}{2} + \vartheta\left[R(b_k) + \frac{3}{4} + \frac{t}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{t}}\right]$$

où $|\vartheta|<1$.

En attribuant à l'indice i les valeurs $i = 1, 2, \ldots, k-1$ dans la formule (11.) et en additionnant les égalités obtenues, on trouvera après les réductions:

$$(16.)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=k-1}\left[s\binom{a_i, b_i}{a_{i+1}, b_{i+1}}-\tau\binom{a_i, b_i}{a_{i+1}, b_{i+1}}\right] = \frac{x}{2}\log\frac{a_1 b_k}{a_k b_1} \\ \qquad\qquad + \vartheta\left[\sum_{i=1}^{i=k-1} R(a_i b_i)+\sum_{i=1}^{i=k-1} R(a_{i+1} b_{i+1})\right] \end{cases}$$

où $|\vartheta|<1$.

En additionnant les égalités (13.), (15.) et (16.) membre à membre ayant égard aux égalités (12.) et (14.), on obtient

$$\sum_{i=0}^{i=k}\left[s\binom{a_i, b_i}{a_{i+1}, b_{i+1}}-\tau\binom{a_i, b_i}{a_{i+1}, b_{i+1}}\right] = x\log x+2Cx+x + \vartheta\left[2\sum_{i=1}^{i=k} R(a_i b_i)+\frac{t}{6}+\sqrt{\frac{x}{t}}+\frac{3}{2}\right]$$

où $|\vartheta|<1$.

En substituant le résultat obtenu dans la formule (8.) et en observant que, d'après la formule (II‴.) du n° 25,

$$\tau\binom{1, 0}{0, 1} = -2x+\frac{1}{4},$$

on trouve

$$(17.)\quad F(x) = x(\log x+2C-1)+\frac{1}{4}+\vartheta\left[2\sum_{i=1}^{i=k} R(a_i b_i)+\frac{t}{6}+\sqrt{\frac{x}{t}}+\frac{3}{2}\right]$$

où $|\vartheta|<1$.

28. Examinons maintenant la somme

$$(18.)\qquad \sum_{i=1}^{i=k} R(a_i b_i).$$

D'après la supposition faite au n° 3, les nombres entiers et positifs a_i et b_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ n'ont pas de diviseur commun et vérifient l'inégalité

$$a_i b_i \leqq t, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Il en résulte que la fonction $R(u)$ étant positive, la somme (18.) est au plus égale à la somme double

$$\sum_{(\tau)} R(mn)$$

si l'ensemble de sommation est défini par les inégalités

$$(19.)\qquad m>0,\ n>0 \quad \text{et} \quad mn\leqq t.$$

On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^{i=k} R(a_i b_i) = \vartheta\sum_{(\tau)} R(mn) \quad \text{où} \quad 0<\vartheta\leqq 1,$$

et, en vertu de (10.), il vient

$$(20.)\quad \sum_{i=1}^{i=k} R(a_i b_i) = \vartheta \sum_{(\tau)} \left[\frac{19}{24} + \left(\frac{\sqrt{x}}{8t} + \frac{\sqrt{t}}{12}\right)\frac{1}{\sqrt{mn}} + \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x}{(mn)^3}}\right] \quad \text{où} \quad 0 < \vartheta \leqq 1.$$

Cela posé, envisageons la somme double

$$\sum_{(\tau)} \frac{1}{(mn)^s}$$

en supposant que $0 \leqq s < 1$.

En vertu des inégalités (19.), on peut présenter la somme considérée sous la forme suivante:

$$(21.)\quad \sum_{(\tau)} \frac{1}{(mn)^s} = \sum_{m>0}^{m \leqq t} \left[\frac{1}{m^s} \sum_{n>0}^{n \leqq \frac{t}{m}} \frac{1}{n^s}\right].$$

A l'aide de l'inégalité connue

$$n^{1-s} - (n-1)^{1-s} \geqq (1-s)\, n^{-s} \qquad (0 \leqq s < 1),$$

on obtient

$$\sum_{n>0}^{n \leqq \frac{t}{m}} \frac{1}{n^s} \leqq \frac{1}{1-s} \cdot \left(\frac{t}{m}\right)^{1-s},$$

et, en vertu de (21.), on aura

$$(22.)\quad \sum_{(\tau)} \frac{1}{(mn)^s} \leqq \sum_{m>0}^{m \leqq t} \frac{t^{1-s}}{1-s} \cdot \frac{1}{m}.$$

A l'aide de l'inégalité connue

$$\frac{1}{m} < \log m - \log(m-1) \qquad (m > 1),$$

on obtient

$$\sum_{m>0}^{m \leqq t} \frac{1}{m} \leqq \log t + 1 \quad \text{où} \quad t \geqq 1,$$

et de l'inégalité (22.) on déduira

$$\sum_{(\tau)} \frac{1}{(mn)^s} \leqq \frac{t^{1-s}}{1-s}(\log t + 1) \qquad (0 \leqq s < 1).$$

En substituant le résultat obtenu dans l'égalité (20.), on la ramènera à celle-ci:

$$\sum_{i=1}^{i=k} R(a_i b_i) = \vartheta(\log t + 1)\left[\frac{23}{24}t + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{t}} + \frac{3}{2}\sqrt[4]{xt}\right] \quad \text{où} \quad 0 < \vartheta \leqq 1.$$

En vertu de cette égalité, la formule (17.) peut s'écrire

$$F(x) = x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + \vartheta\left[(\log t + 1)\left(\frac{23}{12}t + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{t}} + 3\sqrt[4]{xt}\right) + \frac{t}{6} + \sqrt{\frac{x}{t}} + \frac{3}{2}\right]$$

où $|\vartheta| < 1$ et $x \geqq 1$, $t \geqq 1$.

En faisant

$$t = \sqrt[3]{x},$$

on obtient la formule

$$F(x) = x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + \vartheta\left[\left(\frac{1}{3}\log x + 1\right)\cdot\frac{65}{12}\sqrt[3]{x} + \frac{7}{6}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\right].$$

En se rappelant que

$$F(x) = \sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n},$$

on déduira la formule

$$\sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n} = x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + \vartheta\left(\frac{65}{36}\sqrt[3]{x}\log x + \frac{79}{12}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\right)$$

où $|\vartheta| < 1$ et $x \geqq 1$.

La formule obtenue fait voir la propriété suivante de la fonction numérique $\sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n}$.

Théorème. La fonction $x(\log x + 2C - 1)$ *représente la fonction numérique* $\sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n}$ *avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction* $\sqrt[3]{x}\log x$.

Uebergang von den *Abel*schen Integralen zu den Thetafunctionen.

(Von Herrn *M. Tichomandritzky* in Charkow.)

Clebsch und *Gordan* sind die ersten gewesen, die gezeigt haben, wie man, von den *Abel*schen Integralen ausgehend, zu den Thetafunctionen kommen kann. Sie gingen von den Integralen dritter Gattung aus und von der damit in Zusammenhang stehenden und an die Theorie der algebraischen Curven sich anschliessenden Theorie der Function $T_{\xi\eta}\binom{x}{c}$. Dieser Weg schien allen so schwer, dass niemand ihn zu gehen wagte, und in allen später erschienenen Büchern über die Theorie der *Abel*schen Integrale zog man es vor, nach *Riemann* die Theorie der Thetafunctionen vorauszusetzen, um sie zum Umkehrproblem der *Abel*schen Integrale zu benutzen. Indessen war ein anderer, viel natürlicherer und leichterer Weg von den *Abel*schen Integralen zu den Thetafunctionen schon von *Weierstrass*, und später auch von Herrn *M. Nöther* selbständig gefunden, nämlich durch die Integrale 2. Gattung; aber bis jetzt will man nirgends, ausser in Russland*), diesen schönen Weg betreten. Herr *Bäker* hat in seinem inhaltreichen Buche, das nach dem meinigen erschienen ist, recht vieles aus der *Weierstrass*schen Theorie mitgetheilt. Er hat jedoch die synthetische Theorie von *Riemann* zu Grunde gelegt, nicht aber die analytische Theorie von *Weierstrass*, was viel natürlicher wäre.

Vielleicht liegt es daran, dass bei *Weierstrass* selbst die synthetische Art nicht ganz ausgeschlossen ist, und er nicht alles *nur* aus dem von ihm

*) S. *M. Tichomandritzky*. Die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale. Charkow, 1885. 4°. (Russisch.) Derselbe. Elemente der Theorie der *Abel*schen Integrale. Charkow, 1895. 8°. (Russisch.) *V. Ermakow*. Theorie der *Abel*schen Functionen ohne *Riemann*sche Flächen. Kiew, 1897. 8°. (Russisch.)

gefundenen vollständigen Differential entwickelt. Die Analogie mit der elliptischen Thetafunction ist an manchen Stellen bei ihm massgebend gewesen.

Ich habe versucht, alles aus dem erwähnten vollständigen Differential allein herzuleiten, ohne etwas über irgend eine, wenn auch nur elliptische, Thetafunction zu kennen, und es ergab sich, dass die allgemeinen Theta es sind, die ***natürlich*** aus der erwähnten Quelle mit ***allen ihren Eigenschaften*** entstammen. Erst nachher werden aus ihnen durch Specialisirung die *Jacobi*schen erhalten, wodurch der analytische Ausdruck aller Theta gewonnen wird. Geht man den von mir gefundenen Weg, so erscheinen alle Hauptelemente der Thetatheorie nicht als Kunstgriffe genialer Erfinder, sondern als in der Natur der Sache liegend, wodurch diese Theorie, wie mir scheint, an Interesse gewinnt.

Es giebt zwei Hauptmomente in dieser Theorie: das Verschwinden der Thetafunctionen und ihre Functionalgleichung. Ueber das erste habe ich dem zweiten Internationalen Congress der Mathematiker zu Paris im Jahre 1900 mitgetheilt,*) und darum wird diese Abhandlung nur dem zweiten Hauptmomente gewidmet.

Den Ausgangspunkt bildet hier nicht das unbestimmte Integral des erwähnten vollständigen Differentials, wie in anderen Arbeiten, auch meinen früheren, sondern ein bestimmtes Integral davon, längs einer Curve im p-dimensionalen Raume genommen. Dank solcher Auffassung der Sache ist es mir gelungen, die Functionalgleichung der allgemeinen Theta aus ihrer Definition selbst zu erhalten, durch sie zu den Theta ohne und mit Parametern zu kommen, ihre enge Beziehung zu den Tangentialcurven festzustellen, ihre gegenseitigen Relationen zu finden, u. s. w. Die Resultate sind nicht neu; aber auch nicht ihretwegen wage ich meine Arbeit der Oeffentlichkeit zu übergeben, sondern wegen der Art und Weise, wie ich sie erhalten habe; denn für das wissenschaftliche Gebäude ist es ja auch nicht einerlei, wie das wissenschaftliche Material zusammengelegt ist. Erschöpfend ist meine Abhandlung auch nicht; ich habe nur das Wichtigste meiner Betrachtung unterzogen.

---

*) Sur l'évanouissement des fonctions Θ de plusieurs variables. Par ***M. Tichomandritzky***. (Compte rendu du 2ième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris 1900. Procès verbaux et communications. Publiés par ***E. Duporcq***. Paris, 1902. p. 273.)

1. Versteht man unter $\overset{x}{\underset{x_0}{I_h}}$ und $\overset{x}{\underset{x_0}{II_h}}$ die Integrale 1. und 2. Gattung und setzt

$$(1.) \qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I_h}} = u_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(2.) \qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{II_k}} = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

so wird die zweite Summe eine eindeutige Function der Variablen $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ sein, die nur für solche Werthe dieser Variablen unendlich wird, für die einer der Punkte $(\overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)$ in den Punkt (a_k, b_k) fällt, für den $\overset{x}{\underset{x_0}{II_k}}$ unendlich wird, oder für die alle Punkte $(\overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)$ auf eine adjungirte Curve $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$ 1. Gattung fallen. Von diesen Functionen weiss man nach *Weierstrass* und auch nach Herrn *M. Nöther*, dass

$$(3.) \qquad \frac{\partial J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}}}}\right)_k}{\partial u_l} = \frac{\partial J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_l}{\underset{\xi}{I_h}}}}\right)_l}{\partial u_k}$$

ist, woraus folgt, dass die Summe

$$(4.) \qquad \sum_{k=1}^{p} \left(C_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}}}}\right)_k\right) du_k$$

das vollständige Differential einer Function der Variablen $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ ist. Wenn wir es längs einer Curve im p-dimensionalen Raume vom Punkte $\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}$ bis zum Punkte $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ integriren, vorausgesetzt, dass diese Curve nicht durch die singulären Stellen geht, so erhalten wir eine Function der Variablen $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, die wir durch $\Phi(u_h \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h; \xi)$ bezeichnen wollen, so dass

$$(5.) \qquad \Phi\left(u_h \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h; \xi\right) = \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \left(C_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}}}}\right)_k\right) du_k$$

wird, wo rechts — was nicht zu vergessen ist — in allen p Gliedern der Summe alle Variablen gleichzeitig, wenn auch beliebige, so doch in allen

dieselben Wege von ihrem Anfangs- bis zu ihrem Endwerthe durchlaufen. Diese Function wird, wie bekannt, logarithmisch unendlich wie $\log(x-\xi)_{x=\xi}$, wenn sich einer der Punkte (x_i, y_i) dem Punkte (ξ, y_ξ) nähert, oder alle einer solchen Lage zustreben, dass durch sie eine adjungirte Curve 1. Gattung gelegt werden kann. Dadurch ist sie mehrwerthig, und alle ihre Werthe für ein gegebenes Werthsystem der u_h unterscheiden sich um $2q\pi i$, wo q eine positive oder negative ganze Zahl ist. Wollen wir dies vernachlässigen, so werden wir das Gleichheitszeichen (=) durch das Congruenzzeichen ($\equiv$) ersetzen. Da

$$(6.) \qquad I_h^{(a_k)}_{(\xi)} = I_h^{(a_k)}_{(x_0)} - I_h^{(\xi)}_{(x_0)}$$

ist, so genügt es, weil man

$$(7.) \qquad v_h = u_h - I_h^{(\xi)}_{(x_0)}$$

setzen kann, sich nur mit der etwas einfacheren Function

$$(8.) \qquad \Phi\left(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h\right) = \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \left(C_k + J\left(u_h + I_h^{(a_k)}_{(x_0)}\right)_k\right) du_k$$

zu beschäftigen, die aus der Function (5.) dadurch entsteht, dass man den veränderlichen Punkt (ξ, y_ξ) in den festen Punkt (x_0, y_0) hineinrückt. Diese wird logarithmisch unendlich für solche Werthe der Variablen u_h, die einen der Punkte (x_i, y_i) in den Punkt (x_0, y_0) führen, oder alle auf eine adjungirte Curve 1. Gattung bringen.

Setzen wir

$$(9.) \qquad \Theta\left(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h\right) = e^{\Phi\left(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h\right)},$$

so wird dies eine eindeutige Function von u_h, weil $e^{2q\pi i} = 1$ ist. Diese Function ist überall endlich, weil sie da gleich Null wird, wo die Function $\Phi\left(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h\right)$ unendlich wird, und zwar identisch in dem zweiten Falle, wie ich es an anderem Orte, von dieser Definition ausgehend, gezeigt habe. Aber auch alle anderen Eigenschaften der Thetafunctionen müssen aus der Definitionsgleichung (9.) und nur aus dieser abgeleitet werden, und zuerst ihre Functional-

gleichung, die angiebt, wie die Function Θ sich ändert, wenn die Variablen $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ sich um irgend welche simultanen Perioden ändern.

Wir werden die vollständigen Integrale längs der geschlossenen Curven A_g und B_g durch w_{hg} und w'_{hg} für das Integral $\overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}$, und durch η_{hg} und η'_{hg} für das Integral $\overset{x}{\underset{x_0}{II_h}}$ bezeichnen, so dass

$$\varpi_h = \sum_{j=1}^{p} (m_j \omega_{hj} + n_j \omega'_{hj}), \tag{10.}$$

$$\tilde{\eta}_h = \sum_{j=1}^{p} (m_j \eta_{hj} + n_j \eta'_{hj}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{11.}$$

die allgemeinen simultanen Perioden sein werden.

Wir werden also haben

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \varpi_h)_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k + \tilde{\eta}_k, \tag{12.}$$

und auch für die allgemeinere Function 2. Gattung mit dem Parameter in (ξ, y_ξ)

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \varpi_h)_\xi = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi + \tilde{\eta}_\xi, \tag{13.}$$

wo

$$\tilde{\eta}_\xi = \sum_{j=1}^{p} (m_j \eta_{\xi j} + n_j \eta'_{\xi j}) \tag{14.}$$

ist, was wir auch später gebrauchen werden.

Um die erwähnte Aenderung der Thetafunction zu finden, müssen wir die Aenderung des Exponenten in (9.) aufsuchen.

2. Setzen wir $u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \varpi_h$ als obere Grenzen in der Gleichung (8.) § 1, so erhalten wir

$$\left\{\begin{aligned} \Phi\left(u_h + \varpi_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h\right) &= \sum_{k=1}^{p} \int_{k^{(0)}}^{u_k + \tilde{\omega}_k} \left(C_k + J\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k\right) du_k \\ &\equiv \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k^{(0)} + \tilde{\omega}_k} \left(C_k + J\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k\right) du_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)} + \tilde{\omega}_k}^{u_k + \tilde{\omega}_k} \left(C_k + J\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k\right) du_k \end{aligned}\right. \tag{1.}$$

Da

$$(2.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{u_k^{(1)}+\tilde{\omega}_k}^{u_k+\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ = \displaystyle\int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\omega_h}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ = \displaystyle\int_{u_k^{(1)}}^{u_k} \Big(C_k + J\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k + \tilde{\eta}_{|k}\Big)\, du_k \\ = \displaystyle\int_{u_k^{(1)}}^{u_k} \Big(C_k + J\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k + \tilde{\eta}_{|}\,(u_k - u_k^{(1)}) \end{cases}$$

ist, so haben wir sogleich

$$(3.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(1)}+\tilde{\omega}_k}^{u_k+\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(1)}}^{u_k} \Big(C_k + J\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k + \sum_{k=1}^{p} \tilde{\eta}_{|k}\,(u_k - u_k^{(1)}) \\ = \Phi\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(1)}, C_h\Big) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \tilde{\eta}_{|k}\,(u_k - u_k^{(1)}). \end{cases}$$

Für das erste Glied der rechten Seite in (1.) haben wir

$$(4.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(1)}}^{u_k^{(1)}+\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{0}^{\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ \equiv \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \Big\{ \int_{0}^{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ \quad + \displaystyle\int_{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \Big\}; \end{cases}$$

nun ist aber

$$(5.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du \\ = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{0} -\Big(C_k + J\Big(\varpi_h - u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{0} -\Big(C_k + J\Big(-u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k + \tilde{\eta}_{|k}\Big)\, du_k \\ = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{0} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k + \frac{1}{2}\,\tilde{\eta}_{|k}\,\varpi_k; \end{cases}$$

also wird

$$(6.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k^{(0)} + \tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\sum}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ \qquad = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2}\,\tilde{\eta}_{|k}\,\varpi_k. \end{cases}$$

Bringt man dies sowie (3.) in (1.), so erhält man

$$(7.)\quad \begin{cases} \Phi\Big(u_h + \varpi_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h\Big) \equiv \Phi\Big(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h\Big) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \tilde{\eta}_{|k}\Big(u_k - u_k^{(0)} + \frac{1}{2}\,\varpi_k\Big) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k. \end{cases}$$

3. Um das letzte Glied in dieser Gleichung zu finden, führen wir $2p$ willkürliche Constanten $\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}$ und $\overset{p}{\underset{1}{J_k}}$, die wir nachher zweckmässig bestimmen werden, ein, indem wir bemerken, dass

$$(1.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \\ \qquad = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \Big(C_k - J_k\Big)\varpi_k + \sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k} \Big(J_k + J\Big(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k\Big)\, du_k \end{cases}$$

ist, wo das letzte Glied sich so darstellen lässt

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big)\,du_k \\ &\qquad=\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k-J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_k\Big)_k\Big)\,du_k \\ &\qquad\qquad+\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big)\,du_k\,. \end{aligned}\right.$$

Das erste Glied rechts lässt sich sogleich finden, denn man hat

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k-J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big)\,du_k \\ &=\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{u_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{I}}{}_h^{a_k}\Big)_k\,du_k-\sum_{k=1}^{p}\int_{\bar{u}_k^{(0)}-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\bar{u}_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{I}}{}_h^{a_k}\Big)_k\,du_k \\ &\equiv\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\bar{u}_k^{(0)}-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}J\Big(u_h+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\,du_k-\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\bar{u}_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{I}}{}_h^{a_k}\Big)_k\,du_k^{*}) \\ &=\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}}^{\bar{u}_k^{(0)}}\Big\{J\Big(u_h-\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}}}{}_h+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k-J\Big(u_h+\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}}}{}_h+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big\}\,du \\ &\qquad=\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}}^{\bar{u}_k^{(0)}}(-\tilde{\eta}_k)\,du_k=-\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k\,(\bar{u}_k^{(0)}-u_k^{(0)}). \end{aligned}\right.$$

Bringt man dies in (2.) und von da in (1.), so erhält man

---

*) Weil $\int_a^b-\int_c^d=\int_e^b-\int_e^a-\int_e^d+\int_e^c$

$$=\int_e^c-\int_e^a-\Big(\int_e^d-\int_e^b\Big)=\int_a^c-\int_b^d.$$

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big)\,du_k \\ &\equiv\sum_{k=1}^{p}\left[(C_k-J_k)\,\tilde{\omega}_k-(\overline{u}_k^{(0)}-u_k^{(0)})\,\tilde{\eta}_{|k}\right] \\ &\qquad\qquad+\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big)\,du_k, \end{aligned}\right.$$

und hier müssen wir schon die eingeführten Constanten gewissen Bedingungen unterwerfen, um für das letzte Glied, auf das alles in diesem Paragraphen zurückgeführt ist, irgend einen seiner Werthe finden zu können, da *ein* solcher vollständig für uns ausreicht, indem die anderen sich von ihm um $2q\pi i$ unterscheiden.

4. Könnte man die Constanten $\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}}}{}_h^{(0)}$ und $\overset{p}{\underset{1}{J}}{}_k$ so bestimmen — und dies ist immer möglich, wie wir später sehen werden —, dass wäre

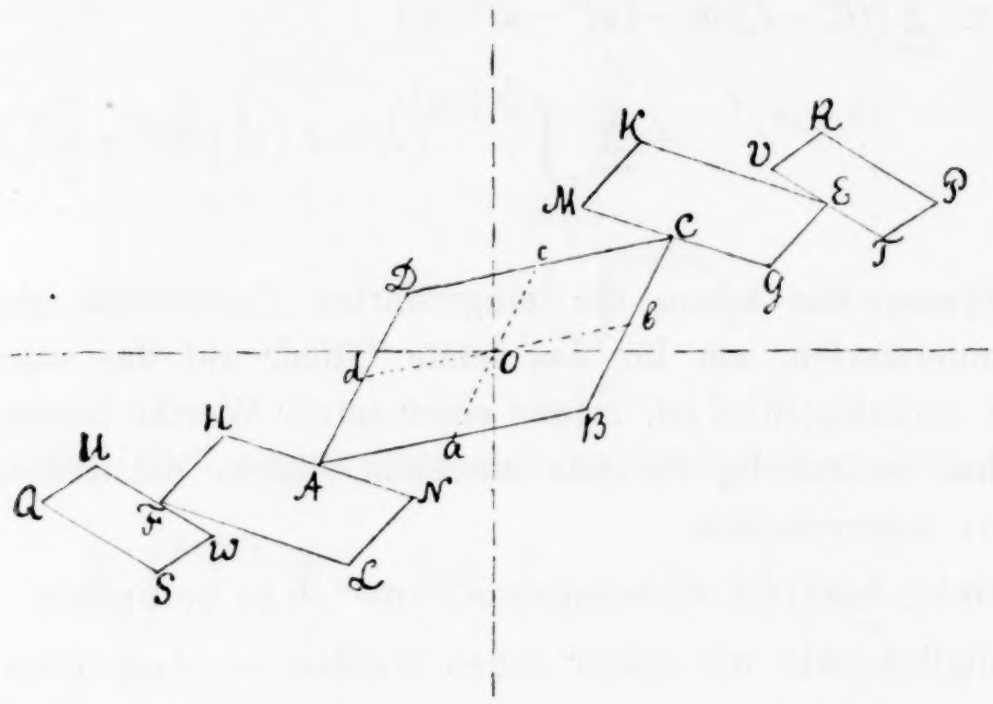
$$(1.)\qquad J_k+J\Big(-u_h+\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k=-\Big(J_k+J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big)\quad{}^{(k=1,2,\ldots,p)}$$

für alle Werthe der Variablen $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h$, so würde man das gesuchte Glied der letzten Formel auf folgende Weise finden. Wenn man diese Gleichung (1.) multiplicirt mit $-du_h$, summirt von $k=1$ bis $k=p$ und dann integrirt von $-\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\omega}}{}_k$ bis $+\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\omega}}{}_k$, so erhält man

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{p}\int_{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J\Big(-u_h+\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big)\,du_k \\ &\qquad=\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k\Big)\,du_k; \end{aligned}\right.$$

das heisst: unser Integral, zwischen symmetrischen Punkten auf irgend einer Curve genommen, ist dem in umgekehrter Richtung zwischen denselben Punkten aber auf der zu der früheren Curve hinsichtlich $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h=0$ symmetrischen Curve genommenen gleich, also gleich der Hälfte des längs der geschlossenen, aus beiden zusammengesetzten, Curve genommenen. Man

muss also nur die beliebige Curve passend wählen, um das Integral zu finden. Wir wählen dazu eine gebrochene Linie, von der die nachstehende Figur, für die Ebene der Variabeln u_k construirt, eine Idee giebt:



Hier ist $AB = m_1 \omega_{k1}$, $BC = n_1 \omega'_{k1}$, (also $Ob = \frac{1}{2} AB$, $bC = \frac{1}{2} BC$); $MC = CG = \frac{1}{2} m_2 \omega_{k2}$, $GE = \frac{1}{2} n_2 \omega'_{k2}$; $VE = ET = \frac{1}{2} m_3 \omega_{k3}$, $TP = \frac{1}{2} n_3 \omega'_{k3}$, u. s. w. Das Parallelogramm HL ist symmetrisch zu KG hinsichtlich O, das Parallelogramm US zu RT, u. s. w. Die entsprechenden Figuren müssen in den Ebenen jeder anderen Variabeln construirt gedacht werden. Die Variabeln sollen sich längs AB der Proportion

$$\frac{du_1}{\omega_{11}} = \frac{du_2}{\omega_{21}} = \ldots = \frac{du_p}{\omega_{p1}} \tag{4.}$$

gemäss ändern; längs BC gemäss der Proportion

$$\frac{du_1}{\omega'_{11}} = \frac{du_2}{\omega'_{21}} = \ldots = \frac{du_p}{\omega'_{p1}}, \tag{5.}$$

und ähnlich für die anderen Seiten der Figur. Die Endpunkte, wie P und Q für $p = 3$, stellen, wie leicht zu sehen, die Punkte $+\frac{1}{2}\varpi_k$ und $-\frac{1}{2}\varpi_k$ dar.

Das längs des ganzen Umfanges in positiver Richtung genommene Integral ist augenscheinlich gleich der Summe der über jedes Parallelogramm einzeln genommenen. Für das centrale Parallelogramm $ABCD$ haben wir, da

$$\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A = \int_A^B - \int_D^C + \int_B^C - \int_A^D$$

ist,

$$(6.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}m_1\omega_{k1}}^{+\frac{1}{2}m_1\omega_{k1}} \Big\{ J_k + J\Big(u_h - \frac{1}{2}n_1\omega'_{h1} \overset{p}{\underset{1}{+}} \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k \\
&\qquad\qquad - J_k - J\Big(u_h + \frac{1}{2}n_1\omega'_{h1} \overset{p}{\underset{1}{+}} \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k \Big\}\, du_k \\
&+ \sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}n_1\omega'_{k1}}^{+\frac{1}{2}n_1\omega'_{k1}} \Big\{ J_k + J\Big(u_h + \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} \overset{p}{\underset{1}{+}} \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k \\
&\qquad\qquad - J_k - J\Big(u_h - \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} \overset{p}{\underset{1}{+}} \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big) \Big\}\, du_k \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}m_1\omega_{k1}}^{+\frac{1}{2}m_1\omega_{k1}} (-n_1\eta'_{k1})\, du_k + \sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}n_1\omega'_{k1}}^{+\frac{1}{2}n_1\omega'_{k1}} m_1\eta_{k1}\, du_k \\
&\qquad = m_1 n_1 \sum_{k=1}^{p} (\eta_{k1}\omega'_{k1} - \eta'_{k1}\omega_{k1}) = m_1 n_1 \cdot 2\pi i
\end{aligned}\right.$$

– nach den bekannten Periodenrelationen der *Abel*schen Integrale 1. und 2. Gattung von *Weierstrass*. – Für das Parallelogramm *MGEK* haben wir, da

$$\int_M^G + \int_G^E + \int_E^K + \int_K^M = \int_M^G - \int_K^E + \int_G^E - \int_M^K$$

ist,

$$(7.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}}^{+\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}} \Big\{ J_k + J\Big(u_h + \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}n_1\omega'_{h1} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k \\
&\qquad - J_k - J\Big(u_h + \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} + \frac{1}{2}n_1 \overset{p}{\underset{1}{\omega'_{h1}}} + \frac{1}{2}n_2\omega'_{h2} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k \Big\}\, du_k \\
&+ \sum_{k=1}^{p} \int_{0}^{\frac{1}{2}n_2\omega'_{k2}} \Big\{ J + J\Big(u_h + \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} + \frac{1}{2}n_1 \overset{p}{\underset{1}{\omega'_{h1}}} + \frac{1}{2}m_2\omega_{h2} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big)_k \\
&\qquad - J_k - J\Big(u_h + \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} + \frac{1}{2}n_1 \overset{p}{\underset{1}{\omega'_{h1}}} - \frac{1}{2}m_2\omega_{h2} + u_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\Big) \Big\}\, du_k =
\end{aligned}\right.$$

$$(7.)\quad \left\{\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}}^{+\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}} \Big\{ J\Big(u_h + \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} + \sum_{1}^{p}\frac{1}{2}n_1\omega'_{h1} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big) \\ &\qquad - J\Big(u_h + \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} + \frac{1}{2}n_1\omega'_{h1} + \frac{1}{2}n_2\omega'_{h2} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k \Big\}\, du_k \\ &\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{p} m_2\,\eta_{k2}\cdot\frac{1}{2}n_2\,\omega'_{k2}; \end{aligned}\right.$$

und für sein symmetrisches *NHFL* haben wir, da

$$\int_N^H + \int_H^F + \int_F^L + \int_L^N = -\int_H^N + \int_F^L + \int_H^F - \int_N^L$$

ist,

$$(8.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}}^{+\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}} \Big\{ -J_k - J\Big(u_h - \frac{1}{2}m_1\omega_{h1}\sum_{1}^{p}\frac{1}{2}n_1\omega'_{h1} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k \\ &\qquad + J_k + J\Big(u_h - \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} - \frac{1}{2}n_1\sum_{1}^{p}\omega'_{h1} - \frac{1}{2}n_2\omega'_{h2} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k \Big\}\, du_k \\ &+ \sum_{k=1}^{p} \int_{0}^{-\frac{1}{2}n_2\omega'_{k2}} \Big\{ J_k + J\Big(u_h - \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} - \frac{1}{2}n_1\sum_{1}^{p}\omega'_{h1} - \frac{1}{2}m_2\omega_{h2} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k \\ &\qquad - J_k - J\Big(u_h - \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} - \frac{1}{2}n_1\sum_{1}^{p}\omega'_{h1} + \frac{1}{2}m_2\omega_{h2} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k \Big\}\, du_k \\ &= \sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}}^{+\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}} \Big\{ -J\Big(u_h - \frac{1}{2}m_1\omega_{h1}\sum_{1}^{p}\frac{1}{2}n_1\omega'_{h1} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big)_k \\ &\qquad + J\Big(u_h - \frac{1}{2}m_1\omega_{h1} - \frac{1}{2}n_1\sum_{1}^{p}\omega'_{h1} - \frac{1}{2}n_2\omega'_{h2} + \overline{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\Big) \Big\}\, du_k \\ &\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{p} (-m_2\,\eta_{k2})\cdot\Big(-\frac{1}{2}n_2\,\omega'_{k2}\Big), \end{aligned}\right.$$

und für die Summe beider, (7.) und (8.),

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}}^{+\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}} (m_1\eta_{k1} + n_1\eta'_{k1})\, du_k \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}}^{+\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}} -(m_1\eta_{k1} + n_1\eta'_{k1} + n_2\eta'_{k2})\, du_k \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{p} m_2 n_2 \eta_{k2}\omega'_{k2} = m_2 n_2 \sum_{k=1}^{p} (\eta_{k2}\omega'_{k2} - \eta'_{k2}\omega_{k2}) = m_2 n_2 \cdot 2\pi i, \end{aligned}\right.$$

– nach denselben Periodenrelationen von *Weierstrass.* – Für das Parallelogramm ***VTPR*** und sein symmetrisches ***WUQS*** sind die Rechnungen dieselben nur mit dem Unterschiede, dass an die Stelle von $m_2\omega_{k2}$ und $n_2\omega'_{k2}$ jetzt $m_3\omega_{k3}$ und $n_3\omega'_{k3}$ treten, und an die Stelle von $\frac{1}{2}m_1\omega_{k1}+\frac{1}{2}n_1\omega'_{k1}$ die Summe $\frac{1}{2}m_1\omega_{k1}+\frac{1}{2}n_1\omega'_{k1}+\frac{1}{2}m_2\omega_{k2}+\frac{1}{2}n_2\omega'_{k2}$; so dass wir für den ihnen entsprechenden Theil des Integrals erhalten werden

$$(10.) \qquad m_3\, n_3 \cdot 2\pi i.$$

Analog ist es auch für alle weiteren Parallelogrammenpaare nur mit dem Unterschiede, dass an die Stelle von $m_2\omega_{k2}$ und $n_2\omega'_{k2}$ die jedesmaligen Perioden treten, und an die Stelle von $\frac{1}{2}m_k\omega_{k1}+\frac{1}{2}n_k\omega'_{k1}$ die Hälfte der Summe aller vorhergehenden Perioden, so dass wir für das letzte Paar als den ihm entsprechenden Theil des Integrals bekommen werden

$$(12.) \qquad m_p\, n_p \cdot 2\pi i.$$

Das Integral wird also im ganzen gleich der Summe

$$(13.) \qquad 2\pi i \sum_{k=1}^{p} m_k\, n_k,$$

und folglich wird

$$(14.) \qquad \sum_{k=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k} \left(J_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overline{u}}}{}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I}}{}_h\right)_k\right) du_k = \pi i \sum_{k=1}^{p} m_k\, n_k.$$

5. Setzt man dies in (4.) § 3 und von da in (7.) § 2, so erhält man:

$$(1.) \quad \begin{cases} \Phi\left(u_h + \bar{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)},\ C_h\right) \equiv \Phi\left(u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)},\ C_h\right) \\ + \sum_{k=1}^{p} \left[(C_k - J_k)\,\bar{\omega}_k - \left(\bar{u}_k^{(0)} - u_k^{(0)}\right)\tilde{\eta}_k\right] + \sum_{k=1}^{p} \left[\tilde{\eta}_k\left(u_h - u_h^{(0)} + \frac{1}{2}\bar{\omega}_k\right) + m_k\, n_k\, \pi i\right]. \end{cases}$$

Nimmt man die beiden Seiten dieser Congruenz (mod. $2\pi i$) zum Exponenten der Zahl e, so erhält man wegen (9.) § 1, und da $e^{\pi i} = -1$ ist, die gesuchte Functionalgleichung der allgemeinen Thetafunction:

$$(2.) \quad \begin{cases} \Theta\left(u_h + \bar{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)},\ C_h\right) \\ \quad = (-1)^{\sum_{k=1}^{p} m_k n_k}\, e^{\sum_{k=1}^{p} \left[\left(C_k - J_k\right)\bar{\omega}_k - \left(\bar{u}_k^{(0)} - u_k^{(0)}\right)\tilde{\eta}_k\right]}\, e^{\sum_{k=1}^{p} \tilde{\eta}_k\left(u_k - u_k^{(0)} + \frac{1}{2}\bar{\omega}_k\right)}\, \Theta\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)},\ C_h\right). \end{cases}$$

6. Anstatt der Parameter $\overset{p}{\underset{1}{C_k}}$ und $u_h^{(0)}$ wollen wir hier andere $\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}$ und $\overset{p}{\underset{1}{\nu_h}}$ einführen, indem wir setzen

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_h^{(0)} - u_h^{(0)} = -\sum_{j=1}^{p} (\mu_j \omega_{kj} + \nu_j \omega'_{kj});^{*}) \\ C_k - J_k = -\sum_{j=1}^{p} (\mu_j \eta_{kj} + \nu_j \eta'_{kj}), \end{array}\right\} \quad (k = 1, \ldots, p)$$

was immer möglich ist, da die Determinante Δ der Coefficienten von $\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}$ und $\overset{p}{\underset{1}{\nu_h}}$ gleich $\pm(2\pi i)^p$, also von Null verschieden ist. Dieses System von $2p$ in Bezug auf die $2p$ Unbekannten $\overset{p}{\underset{1}{\mu_j}}$ und $\overset{p}{\underset{1}{\nu_j}}$ linearen Gleichungen lässt sich sehr schnell mit Hilfe von *Weierstrass*schen Periodenrelationen lösen. Multiplicirt man nämlich die erste dieser Gleichungen mit $-\eta'_{kg}$, die zweite mit ω'_{kg}, und addirt sie dann und summirt nach k von $k = 1$ bis $k = p$, so erhält man wegen der erwähnten Relationen

$$(2.)\quad \sum_{k=1}^{p} [(C_k - J_k)\, \omega'_{kg} - (\overline{u}_k^{(0)} - u_k^{(0)})\, \eta'_{kg}] = -2\pi i \cdot \mu_g;$$

multiplicirt man die erste mit $-\eta_{kg}$ und die zweite derselben Gleichungen mit ω_{kg}, so erhält man in derselben Weise

$$(3.)\quad \sum_{k=1}^{p} [(C_k - J_k)\, \omega_{kg} - (\overline{u}_k^{(0)} - u_k^{(0)})\, \eta_{kg}] = 2\pi i \cdot \nu_g.$$

Multipliciren wir jetzt die Gleichung (2.) mit n_g, die Gleichung (3.) mit m_g, addiren sie und summiren nach g von $g = 1$ bis $g = p$, so werden wir nach (10.) und (11.) des § 1 erhalten:

$$(4.)\quad \sum_{k=1}^{p} [(C_k - J_k)\, \varpi_k - (\overline{u}_k^{(0)} - u_k^{(0)})\, \tilde{\eta}_k] = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} (\nu_g m_g - \mu_g n_g).$$

Wir wollen auch neue Veränderliche mittelst der Gleichungen

$$(5.)\quad u_h - u_h^{(0)} = u'_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

einführen und auch die Bezeichnung der Function selbst etwas abändern, indem wir setzen

$$(6.)\quad \Theta\Big(u'_h + u_h^{(0)} \Big| \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h\Big) = \Theta\Big(u'_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\Big).$$

---

*) Weil man dann hat

$$u_h^{(0)} = \overline{u}_h^{(0)} + \sum_{j=1}^{p} (\mu_j \omega_{hj} + \nu_j \omega'_{hj}).$$

Wegen (4.), (5.) und (6.) nimmt dann die Gleichung (2.) § 5 folgende Gestalt an

$$(7.)\quad \begin{cases} \Theta\Big(u_h+\varpi_h;\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Big) \\ \quad = (-1)^{\sum_{k=1}^{p} m_k n_k}\, e^{2\pi i \sum_{k=1}^{p}(\nu_g m_g-\mu_g n_g)}\, e^{\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k\left(u_k+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k\right)}\, \Theta\Big(u_h;\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Big), \end{cases}$$

wenn man wieder u_h für u_h' schreibt.

Setzt man hier $m_l = 1$, oder $n_l = 1$, und alle anderen m_j und n_j gleich Null, so erhält man folgende $2p$ einfachere Gleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} \Theta\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\omega_{hl}}};\mu_h,\nu_h\Big) = e^{2\pi i\cdot\nu_l}\, e^{\sum_{k=1}^{p}\eta_{kl}\left(u_k+\frac{1}{2}\omega_{kl}\right)}\, \Theta\Big(u_h;\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Big), \\ \Theta\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\omega'_{hl}}};\mu_h,\nu_h\Big) = e^{-2\pi i\cdot\mu_l}\, e^{\sum_{k=1}^{p}\eta'_{kl}\left(u_k+\frac{1}{2}\omega'_{kl}\right)}\, \Theta\Big(u_h;\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Big), \end{cases}$$

durch deren wiederholte Anwendung man wieder zur allgemeinen Gleichung (7.) kommt, worauf wir hier nicht eingehen wollen.*)

Wie bekannt, heisst die Gesammtheit der Zahlen $\Big(\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Big)$ die Charakteristik der Thetafunction; jede Zahl μ_h und ν_h ihr Element.

7. Die einfachste dieser Thetafunctionen ist gewiss die, für welche alle Elemente der Charakteristik verschwinden, für die also

$$(1.)\qquad \mu_h = 0, \qquad \nu_h = 0 \qquad (h=1,2,\ldots,p),$$

— diese wollen wir kürzer so bezeichnen

$$(2.)\qquad \Theta\Big(u_h;\overset{p}{\underset{1}{0_h}},0_h\Big) = \Theta\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big),$$

— weil für sie die Gleichungen (8.) und die allgemeinere (7.) folgende einfachere Gestalt annehmen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \Theta\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\omega_{hl}}}\Big) = e^{\sum_{k=1}^{p}\eta_{kl}\left(u_k+\frac{1}{2}\omega_{kl}\right)}\, \Theta\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big), \\ \Theta\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\omega'_{hl}}}\Big) = e^{\sum_{k=1}^{p}\eta'_{kl}\left(u_k+\frac{1}{2}\omega'_{kl}\right)}\, \Theta\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big); \end{cases}$$

$$(4.)\qquad \Theta\Big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\varpi_h}}\Big) = (-1)^{\sum_{k=1}^{p} m_k n_k}\, e^{\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k\left(u_k+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k\right)}\, \Theta\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big)$$

*) Das findet man in meinem Buche: Die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale. Charkow, 1885. (Russisch) S. 114—116.

Aus den Gleichungen (1.) § 6 folgt, dass für die Werthe (1.) der Elemente der Charakteristik

$$(5.) \qquad C_k = J_k, \qquad u_k^{(0)} = \overline{u}_k^{(0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

wird und umgekehrt: wenn diese Gleichungen stattfinden, so finden auch die Gleichungen (1.) statt.

Da $\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}$ keine willkürlichen Grössen sind, so wissen wir nicht, ob sie als untere Grenzen der Integrale in der Formel (8.) § 1 genommen werden können. Da wir jetzt nach (5.) § 6 auch die $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ in den oberen Grenzen der Integrale dieser Formel durch $u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overline{u}_h^{(0)}}}$ ersetzen müssen, so wollen wir, um dem erwähnten Uebelstande zu entgehen, als untere Grenzen der Integrale $u_h^{(1)} + \overline{u}_h^{(0)}$ nehmen, wo $u_h^{(1)}$ willkürliche Grössen seien. Wir definiren dann eine Function $\Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$ durch die Gleichung

$$(5.) \qquad \Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right) = \Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}\right) + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_h^{(1)} + \overline{u}_h^{(0)}}^{u_h + \overline{u}_h^{(0)}} \left(J_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}}}\right)_k\right) du_k,$$

wo $\Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}\right)$ auch eine willkürliche Grösse ist; oder

$$(6.) \qquad \Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right) = \Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}\right) + \Phi\left(u_h + \overline{u}_h^{(0)} \Big| \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}} + \overline{u}_h^{(0)}, J_k\right),$$

wenn wir die Bezeichnung der Formel (8.) § 1 gebrauchen; die Formel (5.) kann auch so geschrieben werden

$$(7.) \qquad \Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right) = \Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}\right) + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_h^{(1)}}^{u_h} \left(J_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overline{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k\right) du_k.$$

Wenden wir auf diese Function die Gleichung (1.) § 5 an, was die Form (6.) der Definitionsgleichung möglich macht, so bekommen wir

$$(8.) \qquad \Phi\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\varpi_h}}\right) \equiv \Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right) + \sum_{k=1}^{p} \left[\tilde{\eta}_k \left(u_k + \frac{1}{2}\varpi_k\right) + m_k n_k \pi i\right],$$

woraus für die Function

$$(9.) \qquad e^{\Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)}$$

eben die Gleichung (4.) folgen wird; wir können also setzen

$$(10.) \qquad \Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right) = e^{\Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)},$$

da durch diese Gleichung, wie auch durch die Functionalgleichung (4.) die Function $\Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$ nur bis auf einen constanten Factor bestimmt ist.

8. ***Weierstrass*** nannte diese Function *Thetafunction ohne Parameter;* ich möchte sie lieber die *fundamentale* Thetafunction nennen, weil jede andere auf diese zurückgeführt werden kann. Wir können nämlich die Gleichung (8.) § 1 folgendermassen umformen

$$(1.)\quad \begin{cases} \Phi\left(u_h \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h\right) \\ = \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} (C_k - J_k)\, du_k + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \left(J_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{I_h}}\right)_k\right) du_k \\ = \sum_{k=1}^{p} (C_k - J_k)(u_k - u_k^{(0)}) + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)} - \bar{u}_k^{(0)}}^{u_k - \bar{u}_k^{(0)}} \left(J_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k\right) du_k \\ \equiv \sum_{k=1}^{p} (C_k - J_k)(u_k - u_k^{(0)}) + \Phi\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}\right) - \Phi\left(u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}\right); \end{cases}$$

also wird

$$(2.)\qquad \Theta\left(u_h \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h\right) = e^{\sum_{k=1}^{p} (C_k - J_k)\left(u_k - u_k^{(0)}\right)} \frac{\Theta\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}\right)}{\Theta\left(u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}\right)},$$

wenn nur $u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}$ nicht zu den singulären Stellen gehört. Setzt man hier $u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} u_h^{(0)}$ statt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, so wird man haben

$$(3.)\qquad \Theta\left(u_h + u_h^{(0)} \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h\right) = e^{\sum_{k=1}^{p} (C_k - J_k) u_k} \frac{\Theta\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} - \bar{u}_h^{(0)}\right)}{\Theta\left(u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}\right)},$$

und wenn man hierin für $C_h - J_h$ und $u_h^{(0)} - \bar{u}_h^{(0)}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (1.) § 6 einsetzt, so erhält man daraus wegen (6.) § 6 folgende Gleichung

$$(4.)\qquad \Theta\left(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right) = e^{-\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} (\mu_j \eta_{kj} + \nu_j \eta'_{kj})\right) u_k} \frac{\Theta\left(u_h + \sum_{j=1}^{p} (\mu_j \overset{p}{\underset{1}{\omega_{hj}}} + \nu_j \omega'_{hj})\right)}{\Theta\left(+ \sum_{j=1}^{p} (\mu_j \overset{p}{\underset{1}{\omega_{hj}}} + \nu_j \omega'_{hj})\right)}.$$

9. Nun wollen wir die Möglichkeit der Bedingungsgleichungen (1.) § 4, die auch so geschrieben werden können

$$(1.)\qquad J\left(-u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x}{I_h}}\right)_k = -2 J_k,$$

untersuchen, und zugleich, falls sie als möglich erscheinen, eine Methode zur Aufsuchung der betreffenden Werthe der Constanten $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}$ und $\overset{p}{\underset{1}{J}}{}_k$ aufweisen. Wir wollen aber dabei unsere Aufgabe etwas allgemeiner fassen, und untersuchen, ob die Gleichungen (1.) möglich sind für eine *Abel*sche Transcendente 2. Gattung mit dem Parameter in einem beliebigen (nicht singulären) Punkte (ξ, η_ξ); wir werden also nachsehen, ob es möglich ist, die Constanten $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h$ und C_ξ so zu bestimmen, dass man für alle Werthe der Variablen $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h$ hat

$$(2.) \qquad J\left(-\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h\right)_\xi + J\left(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h\right)_\xi = C_\xi.$$

Setzt man

$$(3.) \qquad -u_h + \bar{u}_h = v_h; \qquad u_h + \bar{u}_h = w_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

so wird diese Gleichung

$$(4.) \qquad J\left(\overset{p}{\underset{1}{v}}{}_h\right)_\xi + J\left(\overset{p}{\underset{1}{w}}{}_h\right)_\xi = C_\varkappa.$$

Differentiirt man diese nach u_k, so hat man

$$(5.) \qquad -\frac{\partial J\left(\overset{p}{\underset{1}{v}}{}_h\right)_\xi}{\partial v_k} + \frac{\partial J\left(\overset{p}{\underset{1}{w}}{}_h\right)_\xi}{\partial w_k} = 0.$$

Setzen wir

$$(6.) \qquad v_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{x'_{\xi i}}{\underset{a_i}{I}}{}_h, \qquad w_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{x''_{\xi i}}{\underset{a_i}{I}}{}_h,$$

so werden wir nach der Formel von *V. Ermakow*

$$(7.) \qquad \frac{\partial J\left(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h\right)}{\partial u_k} = H(a_k, b_k | \xi, y_\xi) - D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x}}{}_i, y_i)^*)$$

folgende beiden Gleichungen haben

---

*) Diese Formel wird so erhalten. Da beide Functionen $H(x, y|\xi, y_\xi)$ und $D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a}}{}_i, b_i)$ im Punkte (ξ, y_ξ) unendlich wie $\left.\frac{1}{x-\xi}\right|_{x=\xi}$ werden, so wird ihre Differenz eine adjungirte Function 1. Gattung sein; also kann man setzen

$$(\alpha.) \qquad H(x, y|\xi, y_\xi) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a}}{}_i, b_i) = \sum_{i=1}^{p} A_k \varphi_k\left(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{a}}{}_i, b_i\right);$$

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial J\binom{p}{1} v_h)_\xi}{\partial v_k} = H(a_k, b_k|\xi, y_\xi) - D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x'_{\xi i}, \overset{p}{1} y'_{\xi i}); \\ \dfrac{\partial J\binom{p}{1} w_h)_\xi}{\partial w_k} = H(a_k, b_k|\xi, y_\xi) - D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x''_{\xi i}, \overset{p}{1} y''_{\xi i}). \end{cases}$$

Bringt man dies in (5.), so bekommt man

$$(9.)\qquad D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x'_{\xi i}, \overset{p}{1} y'_{\xi i}) - D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x''_{\xi i}, \overset{p}{1} y''_{\xi i}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

---

macht man hier $(x, y) = (a_l, b_l)$, so erhält man

$$(\beta.)\qquad H(a_l, b_l|\xi, y_\xi) = A_l,$$

da alle $\varphi_k\left(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{a_i}, \overset{p}{1} b_i\right)$ dann gleich Null werden ausser der $\varphi_l\left(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{a_i}, \overset{p}{1} b_i\right)$ die gleich Eins wird. Setzt man dies in $(\alpha.)$, so erhält man

$$(\gamma.)\qquad H(x, y|\xi, y_\xi) - D\ P_{\xi\eta}\left(x, y; \overset{p}{a_i}, \overset{p}{1} b_i\right) = \sum_{k=1}^{p} H(a_k, b_k|\xi, y_\xi)\, \varphi_k\left(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{a_i}, \overset{p}{1} b_i\right).$$

Weiter hat man

$$(\delta.)\qquad J\binom{p}{1} u_h)_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{II}}_\xi,$$

wo

$$(\varepsilon.)\qquad \overset{x_i}{\underset{x_0}{II}}_\xi = \int_{x_0}^{x_i} H(x, y|\xi, y_\xi) \frac{dx}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$$

ist. Differentiirt man $(\delta.)$ nach u_k, und beachtet, dass

$$(\varphi.)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y_i} \varphi_i\left(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{x_i}, \overset{p}{1} y_i\right)$$

ist, so findet man

$$(\varkappa.)\qquad \frac{\partial J\binom{p}{1} u_h)_\xi}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{p} H(x_i, y_i|\xi, y_\xi)\, \varphi_i\left(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{x_i}, \overset{p}{1} y_i\right).$$

Vergleicht man dies mit $(\gamma.)$, so erkennt man, dass an Stelle der Fundamentalpunkte hier die Punkte $\left(\overset{p}{x_i}, \overset{p}{1} y_i\right)$ getreten sind und (x, y) durch (a_k, b_k) ersetzt ist; also wird man nach $(\gamma.)$, wenn man dort diese Veränderung vornimmt, folgende Formel erhalten

$$(\lambda.)\qquad \frac{\partial J\binom{p}{1} u_h)_\xi}{\partial u_k} = H(a_k, b_k|\xi, y_\xi) - D_\xi P_{\xi\eta}\left(a_k, b_k; \overset{p}{x_i}, \overset{p}{1} y_i\right),$$

was zu beweisen war.

eine Gleichung, die uns zeigt, dass die Function der Variabeln (x, y)

$$(10.) \qquad D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x'_{\xi i}, y'_{\xi i}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x''_{\xi i}, y''_{\xi i})$$

in allen p Fundamentalpunkten $(a_k, \overset{p}{\underset{1}{}} b_k)$ verschwindet. Diese Function, als Differenz zweier adjungirter Functionen 2. Gattung mit demselben Parameter (ξ, y_ξ), reducirt sich auf eine adjungirte Function 1. Gattung; wenn aber eine solche in allen p Fundamentalpunkten verschwindet, so ist sie identisch Null. Also haben wir für jeden Werth von (x, y)

$$(11.) \qquad D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x'_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{}} y'_{\xi i}) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x''_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{}} y''_{\xi i}),$$

das heisst, die Punkte $(x'_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{}} y'_{\xi i})$ und $(x''_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{}} y''_{\xi i})$ sind alle $2p$ Nullstellen einer und derselben adjungirten Function 2. Gattung, construirt mit Hülfe der Tangente der Fundamentalcurve $F\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = 0$ im Punkte (ξ, y_ξ), nur dass links die einen, rechts die anderen p Punkte als willkürliche Nullstellen der Function hervorgehoben sind. Wir können also schreiben

$$(12.) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x'_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{}} y'_{\xi i}) &= D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x''_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{}} y''_{\xi i}) \\ &= \frac{\overline{\psi}_\xi\left(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}; x'_{\xi i}, y'_{\xi i} \middle| \overset{p}{\underset{1}{}} x''_{\xi i}, y''_{\xi i}\right)}{l_\xi}, \end{aligned} \right.$$

wo man der Kürze wegen gesetzt hat

$$(13.) \qquad l_\xi = \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial \xi}(x - \xi) + \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}(y - y_\xi).$$

Addirt man jetzt die Gleichungen (3.), so erhält man

$$(14.) \qquad 2\overline{u}_h = v_h + w_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

also wegen (6.)

$$(15.) \qquad 2\overline{u}_h = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{a_i}^{x'_{\xi i}} I_h + \int_{a_i}^{x''_{\xi i}} I_h \right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Diese Gleichungen machen die Berechnung der Werthe der Constanten $\overline{u}_h$ möglich; denn, nimmt man z. B. $(x'_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{}} y'_{\xi i})$ willkürlich an, so werden die anderen durch die Function (12.) bestimmt. Man kann aber auch andere Formeln bekommen, die nichts Willkürliches enthalten. Lässt man alle $\overset{p}{\underset{1}{}} u_h$ sich dem Werthe 0 nähern, so werden v_h und w_h sich $\overline{u}_h$

nähern, und zugleich die Punkte $(x'_{\xi i}, y'_{\xi i})$ und $(x''_{\xi i}, y''_{\xi i})$ einem und demselben Punkte $(c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}})$, und so für $i = 1, 2, \ldots, p$, sodass die Function (12.) zur Function

$$\frac{\overline{\psi}_\xi\left(\begin{matrix}m-1 & n-1 \\ x, & y;\end{matrix}\ c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}}\Big|_1^p\ c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}}\right)}{l_\xi} \tag{16.}$$

wird. Die Formel (5.) wandelt sich dann in die folgende um

$$2\overline{u}_h = 2\sum_{i=1}^{p}\int_{a_i}^{c_{\xi i}} I_h, \tag{17.}$$

oder

$$\overline{u}_h = \sum_{i=1}^{p}\int_{x_0}^{c_{\xi i}} I_h - \sum_{i=1}^{p}\int_{x_0}^{a_i} I_h. \tag{17'.}$$

Fasst man den Quotienten der beiden Functionen (12.) und (16.)

$$\frac{\overline{\psi}_\xi\left(\begin{matrix}m-1 & -1 \\ x, & y;\end{matrix}\ x'_{\xi i}, y'_{\xi i}\Big|_1^p\ x''_{\xi i}, y''_{\xi i}\right)}{\overline{\psi}_\xi\left(\begin{matrix}m-1 & n-1 \\ x, & y;\end{matrix}\ c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}}\Big|_1^p\ c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}}\right)} \tag{18.}$$

ins Auge, so hat man nach dem Theorem von *Abel*

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\int_{c_{\xi i}}^{x'_{\xi i}} I_h + \int_{c_{\xi i}}^{x''_{\xi i}} I_h\right) = 0, \tag{19.}$$

wenn der letzte Integrationsweg passend gewählt ist, woraus folgt

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\int_{a_i}^{x'_{\xi i}} I_h + \int_{a_i}^{x''_{\xi i}} I_h\right) = 2\sum_{i=1}^{p}\int_{a_i}^{c_i} I_h; \tag{20.}$$

also geben die beiden Formeln (15.) und (17.) dieselben Werthe für $2\overline{u}_h$. Die Gleichung

$$\overline{\psi}_\xi\left(\begin{matrix}m-1 & n-1 \\ x, & y;\end{matrix}\ c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}}\Big|_1^p\ c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}}\right) = 0 \tag{21.}$$

stellt eine sogenannte tangentiale adjungirte Curve 2. Gattung vor, die mittels der Tangente im Punkte (ξ, y) an die Fundamentalcurve $F\left(\begin{matrix}m & n \\ x, & y\end{matrix}\right) = 0$ bestimmt ist, und die diese in p Punkten berührt, die durch den Punkt (ξ, y_ξ) fest bestimmt sind. Das Problem, eine solche Curve herzustellen, hängt von der Lösung eines bestimmten Systems algebraischer Gleichungen

ab,*) und hat deshalb eine endliche Anzahl von Lösungen, welche Anzahl später durch andere Betrachtungen viel schneller sich ergeben wird als durch Betrachtung dieses Systems von Gleichungen, weshalb wir dabei nicht stehen bleiben. Von fundamentaler Bedeutung aber für unsere Theorie ist der Umstand, dass alle diese Lösungen in zwei Klassen zerfallen, je nachdem die Curve (21.) eine eigentliche dieser Art ist, oder eine zerfallende, d. h. von der Gestalt

$$(22.) \qquad l\ \varphi\Big(\overset{m-2}{x},\ \overset{n-2}{y};\ c_i, y_{c_i} \Big|_1^{p-1} c_i, y_{c_i}\Big) = 0,$$

also darstellbar als Product einer tangentialen Curve 1. Gattung und der Tangente $l_\xi = 0$ selbst. Im letzten Falle sind die Punkte, wo diese Curve die Fundamentalcurve berührt, ausser dem einen, der in (ξ, y_ξ) fällt, von der Lage dieses Punktes ganz unabhängig, weshalb auch in ihrer Bezeichnung in (22.) ξ herausfallen musste. Mittels einer zerfallenden adjungirten Curve (22.), oder — anders gesagt — mittels einer wegen des Zusammenfallens eines der Berührungspunkte mit (ξ, y_ξ) in

$$\varphi\Big(\overset{m-2}{x},\ \overset{n-2}{y};\ c_i, y_{c_i} \Big|_1^{p-1} c_i, y_{c_i}\Big),$$

degenerirten Function (16.), hätten wir anstatt der Formel (17′.) für $\overline{u}_h$ eine solche

$$(23.) \qquad \overline{u}_h = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{c_i}{\underset{x_0}{I_h}} + \overset{\xi}{\underset{x_0}{I_h}} - \sum_{i=1}^{p} \overset{a_i}{\underset{x_0}{I_h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

gefunden. Setzt man

$$(24.) \qquad \overline{u}_h^{(0)} = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{c_i}{\underset{x_0}{I_h}} - \sum_{i=1}^{p} \overset{a_i}{\underset{x_0}{I_h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

so nimmt dieser Ausdruck von $\overline{u}_h$ eine einfachere Gestalt an

$$(25.) \qquad \overline{u}_h = \overline{u}_h^{(0)} + \overset{\xi}{\underset{x_0}{I_h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

wo nur das zweite Glied rechts von (ξ, y_ξ) abhängt, während in (17.) jedes Glied der ersten Summe rechts davon abhängt.

10. Wie in der Form des Ausdrucks für $\overline{u}_h$, so tritt auch in der Form des Ausdrucks für C_ξ der Unterschied zwischen den beiden Klassen von Lösungen hervor. Da

*) Siehe darüber ***H. Stahl,*** Theorie der ***Abel***schen Functionen. Leipzig, 1896. S. 257 u. f.

(1.) $$J\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right)_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{x'_{\xi i}}{\underset{x_0}{II_\xi}}, \qquad J\left(\overset{p}{\underset{1}{w_h}}\right)_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{x''_{\xi i}}{\underset{x_0}{II_\xi}},$$

sind, so nimmt die Gleichung (4.) § 9 folgende Gestalt an

(2.) $$\sum_{i=1}^{p}\left(\overset{x'_{\xi i}}{\underset{x_0}{II_\xi}} + \overset{x''_{\xi i}}{\underset{x_0}{II_\xi}}\right) = C_\xi,$$

und diese Formel erlaubt uns immer den Werth von C_ξ zu bestimmen, gehöre die Function (12.) § 9 zu der 1. Klasse, oder zu der 2.; für die 1. Klasse gilt aber diese Gleichung auch für die Grenze $\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} 0\right)$, und zwar wird

(3.) $$2\sum_{i=1}^{p} \overset{c_{\xi i}}{\underset{x_0}{II_\xi}} = C_\xi,$$

woraus sich ergiebt

(3′.) $$\frac{1}{2}\, C_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{c_{\xi i}}{\underset{x_0}{II_\xi}};$$

für die zweite Klasse aber wird sie illusorisch für die Grenze $\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} 0\right)$, da eines der Integrale der Summe unendlich wird, indem seine obere Grenze gleich ξ wird, also mit dem Parameter zusammenfällt. Um den Werth von C_ξ in diesem Falle zu finden, muss man einen anderen Weg einschlagen, falls man nicht die Formel (2.) anwenden will.

Setzt man in der Gleichung (2.) § 9 $u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_h$ statt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, so wird sie

(4.) $$J\left(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi + J\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\bar{u}_h\right)_\xi = C_\xi;$$

setzt man hier

(5.) $$u_h = \mathfrak{c}_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{a_i}{\underset{x_0}{I_h}},$$

wo die Integrationswege die nämlichen seien, wie in der Definitionsgleichung der Function $J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$

(6.) $$J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{II_\xi}},$$

so wird

(7.) $$J\left(-\overset{p}{\underset{1}{\mathfrak{c}_h}}\right)_\xi = 0,$$

da alle Integrationswege sich dann auf einen Punkt (x_0, y_0) reduciren, und die Gleichung (4.) giebt uns

$$(8.) \qquad C_\xi = J\left(\mathfrak{c}_h + \overset{p}{\underset{1}{}} 2\bar{u}_h\right)_\xi .$$

Diese Formel (von ***Weierstrass***) ist auch im ersten Falle richtig.

11. Zieht man den aus (17.) § 9 genommenen Werth von $\bar{u}_h$ von den Ausdrücken (6.) § 9 für v_h und w_h ab, so erhält man wegen (3.) § 9

$$(1.) \qquad -u_h = v_h - \bar{u}_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x'_{\xi i}} I_h ; \qquad u_h = w_h - \bar{u}_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x''_{\xi i}} I_h ,$$

also

$$(2.) \qquad \sum_{=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x'_{\xi i}} I_h = -\sum_{i=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x''_{\xi i}} I_h ,$$

was übrigens auch aus der Gleichung (19.) § 9 sofort erhellt. — Zieht man dann (3.) von (2.) § 10 ab, — was aber *nur* für die erste Klasse erlaubt ist, — so bekommt man

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x'_{\xi i}} II_\xi + \sum_{i=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x''_{\xi i}} II_\xi = 0 ,$$

woraus folgt

$$(4.) \qquad \sum_{i=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x'_{\xi i}} II_\xi = -\sum_{i=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x''_{\xi i}} II_\xi .$$

Stellt man dieses mit der Gleichung (2.) zusammen, so erblickt man sogleich mit Rücksicht auf (1.), dass solch eine Summe der Integrale 2. Gattung eine ungerade Function der Variabeln $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ ist, die durch die Gleichungen (1.) definirt sind; denn setzt man mit Herrn ***H. Weber***

$$(5.) \qquad Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi = \sum_{i=1}^{p} \int_{c\,\xi_i}^{x''_{\xi i}} II_\xi ,$$

so lässt sich die vorige Gleichung so schreiben

$$(6.) \qquad Z\left(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi = -Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi .$$

Für die andere Klasse muss, und für diese kann man die Gleichung (2.) § 10 so darstellen:

$$(7.) \qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{x'_{\xi i}}{\underset{x_0}{\Pi}}_{\xi} - \frac{1}{2} C_\xi = -\left(\sum_{i=1}^{p} \overset{x''_{\xi i}}{\underset{x_0}{\Pi}}_{\xi} - \frac{1}{2} C_\xi \right),$$

wo C_ξ durch (8.) bestimmt ist. Stellt man diese Gleichung mit (2.) für die erste und mit

$$(8.) \qquad \sum_{i=1}^{p-1} \overset{x'_{\xi i}}{\underset{c_i}{I}}_{h} + \overset{x'_{\xi p}}{\underset{\xi}{I}}_{h} = -\left(\sum_{i=1}^{p-1} \overset{x''_{\xi i}}{\underset{c_i}{I}}_{h} + \overset{x''_{\xi p}}{\underset{\xi}{I}}_{h} \right)$$

— nach (23.) § 9 — für die zweite Klasse zusammen, so kommt man wieder zu der Gleichung (6.), falls man

$$(9.) \qquad Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{x''_{\xi i}}{\underset{x_0}{\Pi}}_{\xi} - \frac{1}{2} C_\xi$$

setzt und berücksichtigt, dass (1.) und (2.) auch für die 2. Klasse richtig bleiben (mit dem Unterschiede, dass eine der unteren Grenzen gleich ξ wird). Nach (3.) § 9, (1.) und (8.) § 10 kann man diese Gleichung auch so darstellen

$$(10.) \qquad Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi = -\frac{1}{2} J\left(c_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\,\overline{u}_h\right)_\xi + J\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overline{u}_h\right)_\xi .$$

Der Kürze wegen werden wir im Folgenden die Functionen $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ Functionen der 1. oder der 2. Klasse nennen je nach der Klasse der zu ihrer Herstellung gebrauchten Function $\overline{\psi}_\xi$.

12. Schreibt man die Gleichung (9.) § 11 so

$$(1.) \qquad Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi = -\frac{1}{2} C_\xi + J\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overline{u}_h\right)_\xi,$$

so erhält man daraus für $u_h \overset{p}{=} 0$:

$$(2.) \qquad Z\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)_\xi = -\frac{1}{2} C_\xi + J\left(\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}_h}}\right)_\xi .$$

Gehört die Function $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ zur 1. Klasse, so wird

$$(3.) \qquad \overline{u}_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{c_{\xi i}}{\underset{a_i}{I}}_{h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

und

$$(4.) \qquad J\left(\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}_h}}\right)_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{c_\xi}{\underset{x_0}{\Pi}}_{\xi} = \frac{1}{2} C_\xi$$

nach (3.) § 10; also wird

$$(5.) \qquad Z\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)_\xi = 0.$$

Gehört die Function $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ zur 2. Klasse, so wird nach (23.) § 9

$$(6.) \qquad \bar{u}_h = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{a_i}^{c_i} I_h + \int_{a_p}^{\xi} I_h,$$

also

$$(7.) \qquad J\left(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}\right)_\xi = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{x_0}^{c_i} II_\xi + \int_{x_0}^{\xi} II_\xi = \infty^1$$

und darum wird in diesem Falle

$$(8.) \qquad Z\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)_\xi = \infty^1$$

sein. Für $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} 0$ ist also die Function $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ Null oder Unendlich, je nachdem sie von der 1. oder 2. Klasse ist. (Wir sprechen hier von dem einfachsten Werthe der Function.)

13. Jetzt wollen wir die verschiedenen Lösungen unseres Problems mit einander vergleichen. Unsere Constanten $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ und C_ξ sind in den vorigen Paragraphen durch Summen von Integralen 1. oder 2. Gattung dargestellt; da die Werthe der letzteren von dem Integrationswege abhängen, so kann jeder der gefundenen Werthe noch durch beliebige zugehörige Perioden geändert werden; aber alle solche Lösungen, für welche die Werthe dieser Constanten sich nur um ganze Perioden unterscheiden, führen zu derselben Function $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$; denn setzt man in (10.) § 11 $\bar{u}_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{\omega}_h$ statt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, so bekommt das zweite Glied rechts in dieser Formel den Zuwachs $\tilde{\eta}_\xi$, und das erste den Zuwachs $-\tilde{\eta}_\xi$, wie leicht zu sehen; also bleibt die Function $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ dadurch unverändert. Die verschiedenen Lösungen können also nur durch die verschiedenen, zu ihrer Herstellung verwendeten, tangentialen adjungirten Curven entstehen. Es bleibt uns also nur übrig, solche mit einander zu vergleichen.

Nimmt man statt (16.) § 9 eine andere adjungirte Function derselben Klasse 1, nämlich die Function

$$(1.) \qquad \frac{\overline{\psi}_\xi\left(x, y; c'_{\xi i}, y_{c'_{\xi i}} \Big|_1^p c'_{\xi i}, y_{c'_{\xi i}}\right)}{\iota_\xi},$$

so wird man ähnlich den Formeln (17′.) § 9 und (3′.) § 10 haben

$$(2.) \qquad \overline{u}'_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_0}^{c'_{\xi i}} I_h - \sum_{i=1}^{p} \int_{x_0}^{a_i} I_h,$$

$$(3.) \qquad \frac{1}{2} C'_\xi = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_0}^{c'_{\xi i}} II_\xi;$$

nun hat man, wenn man die Function

$$(4.) \qquad \frac{\overline{\psi}_\xi\left(x, y; c'_{\xi i}, y_{c'_{\xi i}} \Big|_1^p c'_{\xi i}, y_{c'_{\xi i}}\right)}{\overline{\psi}_\xi\left(x, y; c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}} \Big|_1^p c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}}\right)}$$

ins Auge fasst, nach dem *Abel*schen Theorem

$$(5.) \qquad 2 \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{x_0}^{c'_{\xi i}} I_h - \int_{x_0}^{c_{\xi i}} I_h \right) = 2(u'_h - u_h) \equiv 0,$$

also $= \overline{\omega}_h$, und

$$(6.) \qquad 2 \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{x_0}^{c'_{\xi i}} II_\xi - \int_{x_0}^{c_{\xi i}} II_\xi \right) = C'_\xi - C_\xi \equiv 0,$$

also $= \overline{\eta}_\xi$, wobei

$$(7.) \qquad \begin{cases} \overline{\omega}_h = \sum_{j=1}^{p} (\overline{m}_j \, \omega_{hj} + \overline{n}_j \, \omega'_{hj}), & (h = 1, 2, \ldots, p) \\ \overline{\eta}_\xi = \sum_{j=1}^{p} (\overline{m}_j \, \eta_{\xi j} + \overline{n}_j \, \eta'_{\xi j}) \end{cases}$$

ist; daraus folgt

$$(8.) \qquad \overline{u}'_h = \overline{u}_h + \frac{1}{2} \overline{\omega}_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(9.) \qquad \frac{1}{2} C'_\xi = \frac{1}{2} C_\xi + \frac{1}{2} \overline{\eta}_\xi.$$

Diese Formeln bleiben auch gültig, wenn man in (4.) eine oder beide Functionen durch

$$(10.) \qquad l_\xi \, \varphi\left(x, y; c_i, y_{c_i} \Big|_1^p c_i, y_{c_i}\right)$$

ersetzt, also durch die Function 2. Klasse, und zwar bleibt für die Formel

(8.) auch die Ableitung des Resultats bestehen, mit dem Unterschiede, dass man für $\bar{u}_h$, oder für $\bar{u}_h$ und $\bar{u}_{h_2}$ die Formel (23.) § 9 benutzt; für die Formel (9.) muss man dazu, da (3.) illusorisch wird, die Formel (8.) § 10 gebrauchen; diese giebt uns

$$(11.)\quad C'_\xi = J\Big(\mathfrak{c}_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\bar{u}'_h\Big)_\xi = J\Big(\mathfrak{c}_h + 2\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}} + \bar{\omega}_h\Big)_\xi = J\Big(\mathfrak{c}_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\bar{u}_h\Big)_\xi + \bar{\eta}_\xi,$$

also

$$(12.)\qquad C'_\xi = C_\xi + \bar{\eta}_\xi,$$

woraus wieder die Formel (9.) folgt.

14. Setzen wir die Ausdrücke von $\overset{p}{\underset{1}{u'_h}}$ und $\frac{1}{2}C'_\xi$ in die nach dem Muster von (2.) § 12 gebildete Function

$$(1.)\qquad Z'\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big)_\xi = -\frac{1}{2}C'_\xi + J\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}'_h\Big)_\xi$$

ein, so bekommen wir

$$(2.)\qquad Z'\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big)_\xi = -\frac{1}{2}C_\xi - \frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi + J\Big(u_h + \bar{u}_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_\xi\Big)_\xi,$$

also nach (2.) § 12

$$(3.)\qquad Z'\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big)_\xi = -\frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi + Z\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\Big)_\xi;$$

so einfach wird die eine dieser Functionen durch die andere ausgedrückt.

Man kann diesen Ausdruck der Function $Z'\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big)_\xi$ durch die $Z\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big)_\xi$ auch auf einem anderen Wege ableiten, wobei sogleich klar wird, dass sie auch ungerade ist. Man hat nämlich

$$(4.)\qquad Z\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{\omega}_h\Big)_\xi = Z\Big(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\Big)_\xi + \bar{\eta}_\xi;$$

setzt man hier $u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h$ anstatt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ und zieht beiderseits $\frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi$ ab, so erhält man, da nach (6.) § 11

$$(5.)\qquad Z\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\Big)_\xi = -Z\Big(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\Big)_\xi$$

ist,

$$(6.)\qquad Z\Big(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\Big)_\xi - \frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi = -\Big(Z\Big(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\Big)_\xi - \frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi\Big),$$

was eben den ungeraden Charakter der Function (3.) ausdrückt.

15. Die Gleichung (3.) § 14 zeigt uns, dass alle Functionen $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ auf eine unter ihnen zurückgeführt werden können durch sehr einfache Operationen: Addition von $\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\omega_h}}$ zu $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ und Subtraction von $\frac{1}{2}\overline{\eta}_\xi$ von dem so sich ergebenden Werthe der Function, wenn $\overset{p}{\underset{1}{\omega_h}}$ und $\overline{\eta}_\xi$ simultane Perioden sind. Da, wie wir schon gesehen haben, eine Veränderung der Constanten $\overline{\underset{1}{u_h}}$ um ganze zusammengehörige Perioden keine Aenderung in der Function $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ hervorbringt, so reicht es aus, den Zahlen $\overset{p}{\underset{1}{m_j}}$ und $\overset{p}{\underset{1}{n_j}}$ in den Ausdrücken (7.) § 13 nur die Werthe 0 und 1 zu geben. Dies giebt im ganzen 2^{2p} Functionen, da jede der $2p$ Zahlen m_j und n_j beide Werthe 0 und 1 unabhängig von der anderen erhalten kann.

Behält man die frühere einfache Bezeichnung unserer Function durch $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$ für irgend eine unter ihnen bei, so könnte man die anderen mit Herrn *Weber**) zweckmässig so bezeichnen

$$(1.)\qquad Z\begin{bmatrix}\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_p\\ \overline{n}_1, \overline{n}_2, \ldots, \overline{n}_p\end{bmatrix}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi \equiv Z\begin{bmatrix}\overset{p}{\overline{m}_j}\\ \underset{1}{\overline{n}_j}\end{bmatrix}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi,$$

— wenn diese durch die Gleichung bestimmt ist

$$(2.)\qquad Z\begin{bmatrix}\overset{p}{\overline{m}_j}\\ \underset{1}{\overline{n}_j}\end{bmatrix}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi = -\frac{1}{2}\overline{\eta}_\xi + Z\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overline{\omega}_h}}\right)_\xi,$$

wo $\overset{p}{\underset{1}{\omega_h}}$ und $\overline{\eta}_\xi$ durch (7.) § 13 gegeben sind. Der Zahlencomplex $\begin{bmatrix}\overset{p}{\overline{m}_j}\\ \underset{1}{\overline{n}_j}\end{bmatrix}$ kann die *Charakteristik der Function* (1.) *in Bezug auf die Function* $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$, genannt werden, da sie sich mit der zu Grunde gelegten Function ändert. Setzt man in der Gleichung (2.) $u_h + \overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\overline{\omega}_h}}$ anstatt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ und zieht von beiden Seiten $-\frac{1}{2}\overline{\eta}_\xi$ ab, so erhält man, wie leicht zu sehen

$$(3.)\qquad -\frac{1}{2}\overline{\eta}_\xi + Z\begin{bmatrix}\overset{p}{\overline{m}_j}\\ \underset{1}{\overline{n}_j}\end{bmatrix}\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\overline{\omega}_h}}\right)_\xi = Z\begin{bmatrix}\overset{p}{\overline{m}_j + \overline{m}_j}\\ \underset{1}{\overline{n}_j + \overline{n}_j}\end{bmatrix}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi,$$

---

*) Zur Theorie der Umkehrung der *Abel*schen Integrale. Dieses Journal, Bd. 70.

also wird die neue Function in Bezug auf die Function (2.) $\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}_j}}\right]$ zur Charakteristik haben; folglich kann man schreiben

$$(4.) \qquad Z\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}_j + \overline{\overline{m}}_j}}\right]\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi = Z\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}_j}}\right]\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{\overline{m}}_j}}\right]\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi .$$

In derselben Weise kommt man auch zu der Formel

$$(5.) \qquad Z\left[\overline{m}_j + \overline{\overline{m}}_j\right](u_h)_\xi = Z\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}_j}}\right]\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{\overline{m}}_j}}\right]\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi .$$

Die Vergleichung dieser beiden Gleichungen giebt uns die Formel

$$(6.) \qquad \left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}_j + \overline{\overline{m}}_j}}\right] = \left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}_j}}\right]\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{\overline{m}}_j}}\right] = \left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{\overline{m}}_j}}\right]\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}_j}}\right],$$

welche das Gesetz der Composition der Charakteristiken angiebt. Dieses ist commutativ.

Die mit der Charakteristik $\left[\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}_j}}\right]$ behaftete, durch die Gleichung (2.) bestimmte Function $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ wird mit der Function $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ zu derselben Klasse gehören oder nicht, je nachdem $\overline{\omega}_h$ mittels des *Abel*schen Theorems einer Function von der Gestalt (4.) § 13 entspricht, wo Zähler und Nenner zu derselben Klasse gehören, oder einer solchen, wo Zähler und Nenner zu verschiedenen Klassen gehören, wie es aus den obigen Auseinandersetzungen erhellt.

Für $\overset{p}{\underset{1}{u_h}} = 0$ wird diese Function endlich oder unendlich, je nachdem sie zu der 1. oder 2. Klasse gehört.

16. Nach diesen allgemeineren Untersuchungen kehren wir zu dem speciellen Fall des § 4 (Gleichung (1.)) zurück. Da hier $(\xi, y_\xi) = (a_k, b_k)$ sein muss, wo $k = 1, 2, \ldots, p$ ist, so erblicken wir sogleich, dass, damit die $\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}_h^{(0)}}}$ dieselben Werthe für alle k haben, nothwendig und hinreichend ist, die Lösung der 2. Klasse des § 9 unserer Aufgabe zur Anwendung zu bringen; denn die Formel (24.) § 9

$$(1.) \qquad \overline{u}_h^{(0)} = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{x_0}^{c_i} I_h - \sum_{i=1}^{p} \int_{x_0}^{a_i} I_h , \qquad (h = 1, 2, \ldots, p$$

giebt für die $\overline{u}_h^{(0)}$ Werthe, die für alle k dieselben bleiben, wie es sein muss. Die Formel (25.) § 9 giebt dann

$$(2.) \qquad \overline{u}_h = \overline{u}_h^{(0)} + \int_{x_0}^{a_k} I_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

also eben das, was zu den Grössen $-\int_1^p u_h$ und $\int_1^p u_h$ in der Gleichung (1.) § 4 unter dem Functionszeichen J addirt wird. Alle anderen Lösungen werden, wie wir gesehen, aus dieser durch Addition von halben Perioden erhalten. Der zugehörige Werth von J_k ist nach den Formeln (8.) § 10 und (2.)

$$(3.) \qquad J_k = -\frac{1}{2} J\Big(\mathfrak{c}_h + 2\Big(\int_1^p \overline{u}_h^{(0)} + \int_{x_0}^{a_k} I_h\Big)\Big).$$

Da durch die Formeln (1.) und (3.) die Constanten $\int_1^p \overline{u}_h^{(0)}$ und $\int_1^p J_k$ nur bis auf zusammengehörige halbe Perioden bestimmt sind, so erhalten wir, wenn wir diese Werthe in (7.) und (10.) § 7 bringen, 2^{2p} Thetafunctionen, deren jede als fundamentale angenommen werden kann, und durch welche dann alle anderen sich ähnlich ausdrücken lassen, wie es in § 8 gezeigt ist. Man erhält diese Ausdrücke aus jenen des § 8, wenn man dort für $\int_1^p u_h^{(0)}$ einen anderen der Werthe einsetzt, die $\overline{u}_h^{(0)}$ annehmen kann, etwa

$$(4.) \qquad \overline{u}_h^{(0)} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

und für C_k den entsprechenden Werth

$$(5.) \qquad J_k - \frac{1}{2}\overline{\eta}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p);$$

dann werden in den Formeln des erwähnten Paragraphen

$$(4.) \qquad u_h^{(0)} - \overline{u}_h^{(0)} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(5.) \qquad C_k - J_k = -\frac{1}{2}\overline{\eta}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

sein, und die Formel (3.) § 8 geht dann über in

$$(6.) \qquad \Theta\Big(u_h + u_h^{(0)} \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h\Big) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\overline{\eta}_k u_k} \frac{\Theta\Big(u_h + \int_1^p \frac{1}{2}\overline{\omega}_h\Big)}{\Theta\Big(\frac{1}{2}\int_1^p \overline{\omega}_h\Big)},$$

falls $\Theta\Big(\frac{1}{2}\int_1^p \overline{\omega}_h\Big)$ von Null verschieden ist; sonst wird sie illusorisch. Ver-

gleicht man (4.) und (5.) mit (1.) § 6, so sieht man, dass jene mit diesen identisch werden, wenn man dort $\mu_h = \frac{1}{2}\overline{m}_h$, $\nu_h = \frac{1}{2}\overline{n}_h$ annimmt; also kann die Gleichung (6.) so geschrieben werden

$$(6'.) \qquad \Theta\left(u_h; \frac{1}{2}\underset{1}{\overset{p}{\overline{m}}}_h, \frac{1}{2}\overline{n}_h\right) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\overline{\eta}_k u_k} \frac{\Theta\left(u_h + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\right)}{\Theta\left(\frac{1}{2}\underset{1}{\overset{p}{\overline{\omega}}}_h\right)}.$$

Eine andere immer gültige Formel wird in derselben Weise aus der Formel (7.) § 7 erhalten. Setzt man dort $\overline{u}_h^{(0)} + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h$ statt $\underset{1}{\overset{p}{\overline{u}}}_h^{(0)}$ und folglich $J_k - \underset{1}{\overset{p}{-}}\frac{1}{2}\overline{\eta}_k$ statt J_k, so bekommt man daraus eine andere Function, die wir für den Augenblick mit $\Phi_1\left(\underset{1}{\overset{p}{u}}_h\right)$ bezeichnen wollen; für diese werden wir haben

$$(7.) \quad \begin{cases} \Phi_1\left(\underset{1}{\overset{p}{u}}_h\right) - \Phi_1\left(\underset{1}{\overset{p}{u}}_h^{(1)}\right) = \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(1)}}^{u_k} \left(J_k - \frac{1}{2}\overline{\eta}_k + J\left(u_h + \overline{u}_h^{(0)} + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h + \underset{x_0}{\overset{a_k}{I}}_h\right)_k\right) du_k \\ = \sum_{k=1}^{p} -\frac{1}{2}\overline{\eta}_k (u_k - u_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(1)} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_k}^{u_k + \frac{1}{2}\overline{\omega}_k} \left(J_k + J\left(u_h + \underset{1}{\overset{p}{\overline{u}}}_h^{(0)} + \underset{x_0}{\overset{a_k}{I}}_h\right)_k\right) du_k \\ \equiv -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\overline{\eta}_k (u_k - u_\kappa^{(1)}) + \Phi\left(u_h + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\right)\left(-\Phi\left(u_h^{(1)} + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\right)\right), \end{cases}$$

also auch

$$(8.) \qquad \frac{\Theta_1\left(\underset{1}{\overset{p}{u}}_h\right)}{\Theta_1\left(\underset{1}{\overset{p}{u}}_h^{(1)}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\overline{\eta}_k u_k}\,\Theta\left(u_h + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\right)}{e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\overline{\eta}_k u_k^{(1)}}\,\Theta\left(u_h^{(1)} + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\right)},$$

woraus man bekommt

$$(9.) \qquad \Theta_1\left(\underset{1}{\overset{p}{u}}_h\right) = K\left(\underset{1}{\overset{p}{\overline{m}}}_j, \overline{n}_j\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\overline{\eta}_k u_k}\,\Theta\left(u_h + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\right),$$

wenn man zur Abkürzung

$$(10.) \qquad \frac{\Theta_1\left(\underset{1}{\overset{p}{u}}_h^{(1)}\right)}{e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\overline{\eta}_k u_k^{(1)}}\,\Theta\left(u_h^{(1)} + \underset{1}{\overset{p}{+}}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\right)} = K\left(\underset{1}{\overset{p}{\overline{m}}}_j, \overline{n}_j\right)$$

setzt. Hier kann $\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}$ so gewählt werden, dass $\Theta\left(u_h^{(1)}+\overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\omega_h}}\right)$ nicht gleich Null wird, und auch $\Theta_1\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}\right)$ nicht. Das ist nämlich immer möglich, da dies eine willkürliche constante Grösse ist, die dadurch jetzt hier erscheint, dass die fundamentale Thetafunction durch die Formel (7.) § 7 nur bis auf einen constanten Factor bestimmt ist.

17. Alle Thetafunctionen, die auf die im vorigen Paragraphen erklärte Weise erhalten werden, haben die Eigenschaft, gerade oder ungerade zu sein. Einen sehr einfachen Beweis dafür hat *V. Ermakow* gegeben. Aus (10.) und (7.) § 7 haben wir

$$(1.)\quad \log\Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)=\Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}\right)+\sum_{k=1}^{p}\int_{u_h^{(1)}}^{u_h}\left(J_k+J\left(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k\right)du_k,$$

also

$$(2.)\qquad d\log\Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(J_k+J\left(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k\right)du_k;$$

nun bleibt aber wegen (1.) § 4 hier die rechte Seite ungeändert, wenn man $-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ statt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ setzt; folglich haben wir

$$(3.)\qquad d\log\Theta\left(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)=d\log\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right).$$

Durch Integration folgt daraus

$$(4.)\qquad \Theta\left(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)=C\,\Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right),$$

wo C eine Constante bedeutet. Setzen wir hier wieder $-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ statt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, so erhalten wir

$$(5.)\qquad \Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)=C\,\Theta\left(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right);$$

multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen mit einander, so bekommt man nach Reduction

$$(6.)\qquad 1=C^2,$$

woraus folgt, dass

$$(7.)\qquad C=\pm 1$$

ist; setzt man dies in (4.), so hat man

$$(8.) \qquad \Theta\left(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right) = \pm\,\Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right),$$

was zu beweisen war. Wir haben diesen Beweis hier aufgenommen nicht nur wegen seiner Einfachheit und Eleganz, sondern auch, weil er den Satz als eine nothwendige Folge der Gleichung (1.) § 4 zeigt.

Die ungerade Thetafunction muss wegen ihrer Continuität für $\overset{p}{\underset{1}{u_h}} = 0$ verschwinden; dafür ist nothwendig, dass $\Phi\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right) = \infty$ werde; dies kann aber nach § 14 und § 15 nur dann sein, wenn die Functionen

$$(9.) \qquad J_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overline{u}_h^{(0)}}} + \overset{\sigma_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

zu der 2. Klasse gehören, da für $\overset{p}{\underset{1}{u_h}} = 0$ nur diese unendlich werden, die der 1. Klasse aber endlich bleiben. Die Functionen der 1. Klasse werden also nur zu den geraden Θ führen; die ungeraden werden folglich durch die Functionen (9.) der 2. Klasse geliefert. Damit die letzteren auch zu geraden Θ führen könnten, müsste mindestens $\Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right) = 0^2$ sein und dafür müssten bei der Degeneration einer Function der 1. Klasse in eine solche der 2. zwei der Punkte $\left(c_{\xi_i}, \overset{p}{\underset{1}{y}}_{c_{\xi_i}}\right)$ in den Punkt (ξ, y_ξ) hineinfallen; das würde aber neue Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichung $F\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = 0$ verlangen, wie aus der Theorie der tangentialen adjungirten Curven bekannt ist; im allgemeinen ist dies also nicht der Fall, und im allgemeinen werden die Functionen der 2. Klasse zu den ungeraden Thetafunctionen führen.

18. Alle diese Thetafunctionen, gerade oder ungerade, können aus dem fundamentalen Theta noch auf eine andere Weise abgeleitet werden, die der in § 14 für $Z\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_\xi$ gebrauchten vollständig analog ist.

Setzt man in der Functionalgleichung des fundamentalen Theta (4.) § 7

$$(1.) \qquad \Theta\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overline{\omega}_h}}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{p} \overline{m}_k \overline{n}_k}\, e^{\sum_{k=1}^{p} \overline{\eta}_k \left(u_k + \frac{1}{2}\overline{\omega}_k\right)}\, \Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$$

$u_h - \overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\overline{\omega}_h}}$ statt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ und multiplicirt dann beiderseits mit $e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \overline{\eta}_k u_k}$, so erhält man ein Resultat, das folgendermassen geschrieben werden kann

$$(2.)\quad e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k}\,\Theta\Big(u_h+\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\Big)=\pm(-1)^{\sum_{k=1}^{p}\bar{m}_k\bar{n}_k}\,e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k}\,\Theta\Big(-u_h+\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\Big)$$

wo das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn die fundamentale Thetafunction gerade, das untere, wenn sie ungerade ist. Aus der Gleichung (2.) ersieht man sogleich, dass die durch diese Operation aus der fundamentalen abgeleitete Thetafunction von demselben Charakter wie die fundamentale ist, wenn

$$(3.)\qquad \sum_{k=1}^{p}\overline{m}_k\bar{n}_k\equiv 0\pmod 2,$$

und von entgegengesetztem, wenn

$$(4.)\qquad \sum_{k=1}^{p}\overline{m}_k\bar{n}_k\equiv 1\pmod 2,$$

ist. Setzt man für einen Augenblick

$$(5.)\qquad f\Big(u_h;\overline{\underset{1}{m}}_h,\bar{n}_h\Big)=e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k}\,\Theta\Big(u_h\overset{p}{+}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\Big),$$

so werden wir nach (4.) § 7 haben

$$(6.)\quad\begin{cases} f\Big(u_h+\overline{\omega}_h;\overline{\underset{1}{m}}_h\bar{n}_h\Big)=e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k(u_k+\tilde{\omega}_k)}\,\Theta\Big(u_h+\frac{1}{2}\overline{\underset{1}{\omega}}_h+\overline{\omega}_h\Big)\\ =(-1)^{\sum_{k=1}^{p}m_k n_k}\,e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k(u_k+\tilde{\omega}_k)}\,e^{\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k\left(u_k+\frac{1}{2}\bar{\omega}_k+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k\right)}\,\Theta\Big(u_h\overset{p}{+}\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\Big)\\ =(-1)^{\sum_{k=1}^{p}m_k n_k}\,e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}(\bar{\eta}_k\tilde{\omega}_k-\bar{\omega}_k\tilde{\eta}_k)}\,e^{\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k\left(u_k+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k\right)}\,f\Big(u_h;\overline{\underset{1}{m}}_h,\bar{n}_h\Big),\end{cases}$$

oder, da man nach den Periodenrelationen von *Weierstrass* hat

$$(7.)\qquad \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2}(\bar{\eta}_k\overline{\omega}_k-\overline{\omega}_k\tilde{\eta}_k)=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\Big(\frac{1}{2}\overline{m}_k n_k-\frac{1}{2}\bar{n}_k m_k\Big)$$

folgendes:

$$(8.)\quad\begin{cases} f\Big(u_h+\overline{\omega}_h;\overline{\underset{1}{m}}_h,\bar{n}_h\Big)\\ \quad=(-1)^{\sum_{k=1}^{p}m_k n_k}\,e^{2\pi i\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\bar{n}_k m_k-\frac{1}{2}\bar{m}_k n_k\right)}\,e^{\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k\left(u_k+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k\right)}\,f\Big(u_h;\overline{\underset{1}{m}}_h,\bar{n}_h\Big).\end{cases}$$

Vergleicht man dies mit (7.) § 6, so erkennt man sogleich, dass $f\Big(u_h;\overline{\underset{1}{m}}_h,\bar{n}_h\Big)$

sich nur durch einen Factor von $\Theta\left(u_h; \frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}}}_h \frac{1}{2} n_h\right)$ unterscheiden kann; also haben wir mit Rücksicht auf (9.) § 16 und (2.)

$$(9.)\quad \begin{cases} \Theta\left(u_h; \frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}}}_h, \frac{1}{2}\bar{n}_h\right) = K\left(\overline{m}_h, \overset{p}{\underset{1}{\bar{n}}}_h\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \bar{\eta}_k u_k}\, \Theta\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\overline{\omega}}}_h\right) \\ \qquad = \varepsilon K\left(\overline{m}_h, \overset{p}{\underset{1}{\bar{n}}}_h\right) e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \bar{\eta}_k u_k}\, \Theta\left(-u_h + \overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\overline{\omega}}}_h\right), \end{cases}$$

wenn die Constante auf die frühere Weise bezeichnet und

$$(10.)\qquad \varepsilon = \pm (-1)^{\sum_{k=1}^{p} m_k n_k},$$

gesetzt wird.

Da

$$(11.)\qquad e^{2\pi i \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\bar{n}_k m_k - \frac{1}{2}\bar{m}_k n_k\right)} = (-1)^{\sum_{k=1}^{p}(\bar{m}_k n_k + \bar{n}_k m_k)}$$

ist, und

$$(12.)\qquad m_k n_k + \overline{m}_k n_k + \bar{n}_k m_k = (m_k + \overline{m}_k)(n_k + \bar{n}_k) - \overline{m}_k \bar{n}_k$$

ist, so kann die Gleichung (8.), die Functionalgleichung der Function (9.), so dargestellt werden:

$$(13.)\quad \begin{cases} \Theta\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overline{\omega}}}_h; \frac{1}{2}\overline{m}_h \frac{1}{2}\bar{n}_h\right) \\ = (-1)^{\sum_{k=1}^{p}\bar{m}_k \bar{n}_k} (-1)^{\sum_{k=1}^{p}(m_k+\bar{m}_k)(n_k+\bar{n}_k)}\, e^{\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k (u_k + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_k)}\, \Theta\left(u_h; \frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\overline{m}}}_h, \frac{1}{2}\bar{n}_h\right). \end{cases}$$

19. Setzt man in der Gleichung (2.) § 18 $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} 0$, so bekommt man

$$(1.)\qquad \Theta\left(\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\overline{\omega}}}_h\right) = \pm (-1)^{\sum_{k=1}^{p}\bar{m}_k \bar{n}_k}\, \Theta\left(\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\overline{\omega}}}_h\right).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass

$$(2.)\qquad \Theta\left(\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\overline{\omega}}}_h\right) = 0$$

wird, wenn

$$(3.)\qquad \pm (-1)^{\sum_{k=1}^{p}\bar{m}_k \bar{n}_k} = -1,$$

das heisst, dass die fundamentale Thetafunction verschwindet für $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} \frac{1}{2}\overline{\omega}_h$, im Falle (4.) § 18, wenn sie gerade ist, und im Falle (3.) § 18, wenn sie

ungerade ist. Man nennt die Charakteristiken, deren Elemente der Bedingung (3.) § 18 genügen, gerade Charakteristiken, und solche, deren Elemente der Bedingung (4.) § 18 genügen, ungerade Charakteristiken. Man kann diese Benennung auf die entsprechenden halben Perioden übertragen und dann den letzten Satz so aussprechen:

Die fundamentale Thetafunction verschwindet für ungerade halbe Perioden, wenn sie gerade, und für gerade halbe Perioden, wenn sie ungerade ist.

Setzt man in der Gleichung (9.) § 18 $u_h \overset{p}{=}_1 \frac{1}{2}\varpi_h$, so erkennt man, dass

$$\Theta\left(\frac{1}{2}\varpi_h; \frac{1}{2}\overset{p}{m}_{1h}, \frac{1}{2}\bar{n}_h\right) = 0 \tag{4.}$$

wird, wenn

$$\Theta\left(\frac{1}{2}\left(\varpi_h \overset{p}{+}_1 \overline{\omega}_h\right)\right) = 0 \tag{5.}$$

ist; also, falls die fundamentale Thetafunction gerade ist, wenn

$$\sum_{k=1}^{p}(m_k+\overline{m}_k)(n_k+\bar{n}_k) \equiv 1 \pmod 2, \tag{6.}$$

und falls sie ungerade ist, wenn

$$\sum_{k=1}^{p}(m_k+\overline{m}_k)(n_k+\bar{n}_k) \equiv 0 \pmod 2$$

ist. Diese Nullstellen der Thetafunctionen sind die ausgezeichneten, Hauptnullstellen, wie sie ***Pokrowsky*** nannte,*) die allein bleiben, wenn $p = 1$ wird; sonst aber giebt es auch unendlich viele andere, deren Gesammtheit eine Fläche in dem p-dimensionalen Raume bildet.

20. Nachdem die Haupteigenschaften der allgemeinen Thetafunction aus ihrer Definition durch die Gleichungen (8.) und (9.) § 1 entwickelt worden sind, können wir zur speciellen übergehen.

Die bisher betrachteten fundamentalen Integrale 2. Gattung sind die allgemeinen gewesen, also durch die Formel darstellbar

$$\overset{x}{\underset{x_0}{II}}_k = \overset{x}{\underset{x_0}{II}}{}^{0}_k + \sum_{l=1}^{p} c_{kl} \overset{x}{\underset{x_0}{I}}_l \qquad (k=1,2,\ldots,p), \tag{1.}$$

*) ***P. Pokrowsky.*** Theorie der ultraelliptischen Functionen der 1. Klasse. Moskau, 1887 (Russisch.) S. 199. § 25. S. auch Moskau, Mathematische Sammlung. (*Sbornik*) Bd. XIII. S. 245 und 409.

wo $\overset{x}{\Pi}{}_k^0$ ein specielles Integral 2. Gattung mit demselben Parameter bedeutet, und $\overset{x_0}{}$ wo die c_{kl} willkürliche Constanten sind, die nur den Bedingungen

$$c_{kl} = c_{lk} \tag{2.}$$

genügen müssen. Lässt man (x, y) die Curven A_h, oder B_h einmal umlaufen, so vermehrt sich das Integral (1.) um

$$\left.\begin{aligned} \eta_{kh} &= \eta_{kh}^{(0)} + \sum_{l=1}^{p} c_{kl}\,\omega_{lh} \qquad (3.) \\ \text{oder} \qquad & \qquad (h = 1, 2 \ldots, p). \\ \eta'_{kh} &= \eta'^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{p} c_{kl}\,\omega'_{lh} \qquad (4.) \end{aligned}\right\}$$

Wir können die Constanten c_{kl} so bestimmen, dass

$$\eta_{kh}^{(0)} + \sum_{l=1}^{p} c_{kl}\,\omega_{lh} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{5.}$$

wird. Die Determinante

$$\Omega = |\omega_{lh}| \qquad (l, h = 1, 2, \ldots p) \tag{6.}$$

dieses Systems von p Gleichungen mit p Unbekannten $c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kp}$ ist von Null verschieden*), und wenn

$$\Omega_{lh} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{lh}} \tag{7.}$$

gesetzt wird, so finden wir aus (5.)

$$c_{kg} = -\sum_{h=1}^{p} \Omega_{gh}\,\eta_{kh}^{(0)} \tag{8.}$$

und ebenso

$$c_{gk} = -\sum_{h=1}^{p} \Omega_{kh}\,\eta_{gh}^{(0)}. \tag{8'.}$$

---

*) Man kann dies nämlich immer voraussetzen; denn würde es für die ursprünglichen Curven A_h und B_h $(h = 1, 2, \ldots, p)$ nicht gelten, so könnte man andere nehmen, für die es stattfindet. Der Aenderung dieser Curven entspricht das Ersetzen der ursprünglichen Perioden durch lineare Combinationen von ihnen. Eine der einfachsten würde die sein, dass man einige ω_{kh} und ω'_{lh}, bei unveränderten k und l und für $h = 1, 2, \ldots, p$ umtauschte; dann würde Ω in eine solche Determinante übergehen, in der einige oder auch alle Reihen der ω_{kh} $(h = 1, 2, \ldots, p)$ durch Reihen der ω'_{lh} $(h = 1, 2, \ldots, p)$ ersetzt sind; aber unter allen solchen Determinanten wird gewiss wenigstens eine sein, die von Null verschieden ist, weil sonst nach dem *Laplace*schen Theorem über die Determinanten auch $\triangle = \pm (2\pi i)^p$ gleich Null sein würde, was absurd ist.

Mit Hülfe der Periodenrelationen von *Weierstrass* überzeugt man sich leicht, dass diese Werthe den Bedingungen (2.) Genüge thun.*) Setzt man daher den Werth (8'.) für c_{gk} in (4.) ein, so erhält man

$$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} - \sum_{l=1}^{p} \omega'_{lh} \sum_{j=1}^{p} \Omega_{kj}\, \eta^{(0)}_{lj}. \tag{9.}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}$ und summirt das Product nach k von 1 bis p, so erhält man für den Exponenten von e in der zweiten der Gleichungen (3.) § 7

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \eta'_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) &= \sum_{k=1}^{p} \eta'^{(0)}_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{p} \omega'_{lh} \sum_{j=1}^{p} \eta^{(0)}_{lj} \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kj}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right). \end{aligned} \right. \tag{10.}$$

Dieser Ausdruck wird viel einfacher, wenn man setzt:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kj}\, u_k &= v_j, \qquad (11.) \\ \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kj}\, \omega'_{kh} &= \tau_{hj} \qquad (12.) \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

wobei

$$\tau_{jh} = \tau_{hj} \tag{13.}$$

sein wird, was man durch dieselben Periodenrelationen leicht beweist. Löst man diese Gleichungen auf — die p oberen nach u_g, die p unteren nach ω'_{kh} —, so erhält man

$$u_g = \sum_{j=1}^{p} \omega_{gj}\, v_j, \tag{14.}$$

$$\omega'_{gh} = \sum_{j=1}^{p} \omega_{gj}\, \tau_{jh}. \tag{15.}$$

Mit Hülfe von (11.) und (12.) für das zweite Glied in (10.) rechts, und mit Hülfe von (14.) und (15.) für das erste, giebt man der Gleichung (10.) die Form:

$$\sum_{k=1}^{p} \eta'_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(v_j + \frac{1}{2}\tau_{jh}\right) \sum_{k=1}^{p} \left(\eta'^{(0)}_{kh}\omega_{kj} - \omega'_{kh}\eta^{(0)}_{kj}\right), \tag{16.}$$

und diese reducirt sich nach den *Weierstrass*schen Periodenrelationen auf

*) S. meine Bücher über die hyperelliptischen und *Abel*schen Integrale. Auch *K. Weierstrass*, Mathematische Werke. Bd. IV. S. 535.

$$(17.) \qquad \sum_{k=1}^{p} \eta'_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) = -2\pi i\left(v_h + \frac{1}{2}\tau_{hh}\right),$$

wo

$$(18.) \qquad \tau_{hh} = \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kh}\,\omega'_{kh}.$$

Der Ausdruck (17.) wird der Exponent von e in der zweiten der Gleichungen (3.) § 7; in der ersten aber wird er Null wegen (5.).

21. Wenn man in der Gleichung (11.) § 20 $u_k + \omega_{kh}$ statt u_k setzt, so erhält v_j einen neuen Werth, den wir mit $v_j^{(h)}$ bezeichnen wollen; man findet leicht, dass dann

$$(1.) \qquad \begin{cases} v_j^{(h)} = v_j, & (h \leqslant j) \\ v_j^{(j)} = v_j + 1 \end{cases}$$

wird. Setzt man $u_k + \omega'_{kh}$ statt u_k in dieselbe Gleichung, und bezeichnet den neuen dadurch entstandenen Werth von v_j durch $v_j^{(h')}$, so wird

$$(2.) \qquad v_j^{(h')} = v_j + \tau_{jh}.$$

Wir wollen die mit Hülfe von speciellen Integralen der 2. Gattung erlangte *gerade* fundamentale Thetafunction zum Unterschiede von der allgemeinen, früher betrachteten, mit $\Theta_0\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$ bezeichnen, und wenn in diese neue Variable $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ mittels der Gleichungen (11.) § 20 eingeführt werden, mit $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right)$, so dass man

$$(3.) \qquad \Theta_0\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right) = \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right)$$

hat. Durch diese Transformation werden dann die Gleichungen (3.) § 7 folgende Gestalt bekommen

$$(4.) \qquad \vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k + 1, v_{k+1}, \ldots, v_p) = \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right),$$

$$(5.) \qquad \vartheta\left(v_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \tau_{kh}\right) = e^{-2\pi i\left(v_k + \frac{1}{2}\tau_{kk}\right)}\,\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right).$$

Durch ihre wiederholte Anwendung kommt man zur allgemeineren

$$(6.) \qquad \vartheta\left(v_h + \overset{p}{\underset{1}{m_h}} + \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{jh}\right) = e^{-\pi i \sum_{k=1}^{p} n_k\left(2v_k + \sum_{l=1}^{p} \tau_{kl} n_l\right)}\,\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right).$$

22. Da die Function $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$ eine *periodische* [nach (4.)] *ganze* Function von $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ ist, so ist sie nach *Fouriers* Theorem so darstellbar:

$$(1.) \qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_k}}\right) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} m_i\right)^p A_{\underset{1}{m_i}}^{p} e^{2\pi i \sum_{k=1}^{p} m_k v_k};$$

mit Hülfe der Gleichung (5.) § 21 findet man

$$(2.) \qquad A_{\underset{1}{m_h}}^{p} = A_{\underset{1}{0_h}}^{p} e^{2\pi i \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \tau_{kl} m_k m_l}.$$

Bringt man dies in (1.), setzt dann $A_{\underset{1}{0_h}}^{p} = 1$, so erhält man die Entwickelung der *Jacobi*schen Thetafunction in eine Reihe

$$(3.) \qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} m_i\right)^p e^{\pi i \sum_{k=1}^{p} m_k \left(2v_k + \sum_{l=1}^{p} \tau_{kl} m_l\right)}.$$

23. In dieser Weise haben wir eine analytische Darstellung der speciellen Function (3.) § 21 erhalten, die in der Form (3.) § 22 unter dem Namen *Jacobi*sche bekannt ist. Auf diese aber wird man leicht jede andere der früher betrachteten zurückführen. Es reicht dazu aus, die Constanten c_{kl} in zwei Theile zu zerlegen, deren einer durch die Formel (8.) § 20 bestimmt wird. Wir setzen also

$$(1.) \qquad c_{kg} = -\sum_{k=1}^{p} \Omega_{gh}\, \eta_{kh}^{(0)} + b_{kg}.$$

Aus der Gleichung (1.) § 20 folgt mit Rücksicht auf (5.) § 10

$$(2.) \qquad J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_k = J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_k^{(0)} + \sum_{j=1}^{p} c_{kj}\,(u_j + \mathfrak{c}_j);$$

setzt man hier statt c_{kj} seinen Werth aus (1.) ein, so bekommt man

$$(3.) \qquad J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_k = J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_k^{(0)} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{h=1}^{p} \Omega_{jh}\, \eta_{kh}^{(0)}\,(u_j + \mathfrak{c}_j) + \sum_{j=1}^{p} b_{kj}\,(u_j + \mathfrak{c}_j),$$

oder, wenn man

$$(4.) \qquad J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_k^{(1)} = J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_k^{(0)} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} \Omega_{jh}\, \eta_{kh}^{(0)}\,(u_j + \mathfrak{c}_j)$$

setzt, einfacher

$$(5.) \qquad J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_k = J\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{p} b_{kj}\,(u_j + \mathfrak{c}_j).$$

Indem man hier

$$(6.) \qquad u_h = \mathfrak{c}_h + 2\left(\bar{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)$$

setzt, erhält man

$$(7.) \quad J_k = -\frac{1}{2} J\left(\mathfrak{c}_h + 2\left(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)\right)_k = J_k^{(1)} - \sum_{j=1}^{p} b_{kj}\left(\bar{u}_j^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_j}} + \mathfrak{c}_j\right),$$

wo nach (4.)

$$(8.) \quad \begin{cases} J_k^{(1)} = -\frac{1}{2} J\left(\mathfrak{c}_h + 2\left(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)\right)_k^{(1)} \\ \qquad = -\frac{1}{2} J\left(\mathfrak{c}_h + 2\left(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)\right)_k^{(0)} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} \Omega_{jh}\, \eta_{kj}^{(0)}\left(\bar{u}_j^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_j}} + \mathfrak{c}_j\right) \end{cases}$$

ist. Setzt man jetzt in (5.) $u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}$ anstatt $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, und addirt dazu (7.), so erhält man

$$(9.) \quad J_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k = J_k^{(1)} + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{p} b_{kj} u_j.$$

Jetzt wollen wir hier

$$(10.) \qquad \bar{\bar{u}}_h^{(0)} = \bar{u}_h^{(0)} + \frac{1}{2}\bar{\bar{\omega}}_h$$

statt $\bar{u}_h^{(0)}$ einsetzen; dann werden sich nach (3.) § 16 J_k und $J_k^{(1)}$ in

$$(11.) \qquad \bar{J}_k = J_k - \frac{1}{2}\bar{\bar{\eta}}_k \qquad \text{und} \qquad \bar{J}_k^{(0)} = J_k^{(1)} - \frac{1}{2}\bar{\bar{\eta}}_k$$

verwandeln, und die Gleichung (9.) geht dann in die folgende

$$(12.) \quad \bar{J}_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{\bar{u}}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k = \bar{J}_k^{(1)} + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{\bar{u}}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{p} b_{kj}\, u_j$$

über. Nehmen wir $\overset{p}{\underset{1}{\bar{\bar{\omega}}_h}}$ in (10.) als so gewählt an, dass in der Gleichung (12.) die Function der linken Seite und folglich der entsprechende Theil der rechten Seite Functionen der 1. Klasse sind, so kann man die Gleichung (12.) mit du_k multipliciren, dann von $k = 1$ bis $k = p$ summiren, und von dem Punkte $\overset{p}{\underset{1}{u_h}} = 0$ integriren; man erhält dann Folgendes

$$(13.) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} \int_{0}^{u_k} \left(\bar{J}_k + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k\right) du_k \\ \qquad = \sum_{k=1}^{p} \int_{0}^{u_k} \left(\bar{J}_k^{(1)} + J\left(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{I_h}}\right)_k^{(1)}\right) du_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} b_{kj}\, u_j\, u_k, \end{cases}$$

woraus folgt, dass

$$(14.)\quad \overline{\Phi}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)-\overline{\Phi}\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)\equiv\overline{\Phi}^{(1)}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)-\overline{\Phi}^{(1)}\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}\,u_j\,u_k$$

ist; hieraus folgt die Gleichung

$$(15.)\quad \frac{\overline{\Theta}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\overline{\Theta}\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)}=\frac{\overline{\Theta}^{(1)}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\overline{\Theta}^{(1)}\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)}\,e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}u_j u_k}$$

zwischen den allgemeinen und speciellen geraden Thetafunctionen. Unter den letzteren findet sich auch die in § 21 mit $\Theta_0\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$ bezeichnete, die den Werth 1 für $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} 0$ annimmt. Setzt man voraus, dass in (10.) $\frac{1}{2}\overline{\overline{\omega}}_k$ eben so gewählt ist, dass es zu dieser Thetafunction führt, dann erhält man aus (15.) folgende Gleichung:

$$(16.)\quad \frac{\overline{\Theta}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\overline{\Theta}\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)}=\Theta_0\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)\,e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}u_j u_k}.$$

Führt man hierin die Variablen $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ mittelst der Gleichungen (14.) § 20 ein, und setzt

$$(17).\quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}\,\omega_{kg}\,\omega_{jh}=\pi i\cdot\beta_{gh},$$

so bekommt man mit Rücksicht auf (3.) § 21 folgende Formel

$$(18.)\quad \frac{\overline{\Theta}\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\overline{\Theta}\left(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}\right)}=\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right)e^{\pi i\sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{p}\beta_{gh}v_g v_h},$$

durch welche die allgemeine *gerade* fundamentale Thetafunction auf die *Jacobi*sche zurückgeführt, und so der analytische Ausdruck für jene gewonnen ist. Da die anderen Thetafunctionen mit Parameter — nach *Weierstrass*scher Benennung —, die man auch die *abgeleiteten* nennen könnte, sich durch die fundamentale Thetafunction nach § 17 und § 18 ausdrücken lassen, so haben wir dadurch zugleich die analytischen Ausdrücke für alle Theta erworben.

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
JAN 25 1904

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 126.

Heft IV.

Ausgegeben den 28. Dezember.

Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1903.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Band 126. Heft IV.

Inhaltsverzeichniss.

Voronoï, G. Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques . . Seite 241

Tichomandritzky, M. Uebergang von den *Abel*schen Integralen zu den Thetafunctionen . . . . . — 283

Sendungen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Professor Dr. Kurt Hensel. Marburg a. d. L., Universitätsstrasse 54.